① الف) $-4 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow -4 \leq 3x-2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 3x \leq 4 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow D_{f(3x-2)} = [-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$

ب) $D_{f(3x-2)} = [-4,-2] \Rightarrow$ ① $3x-2 \xrightarrow{x=-4} 3(-4)-2=-14$ ② $3x-2 \xrightarrow{x=-2} 3(-2)-2=-8$

$\Rightarrow D_{f(x)} = [-14,-8]$

---

②

$f(x) = x + \sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{① ۲ واحد به راست می‌بریم}} f(x) = x-2+\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4}+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$

$y - \frac{7}{4} = (\sqrt{x-4}+\frac{1}{2})^2$

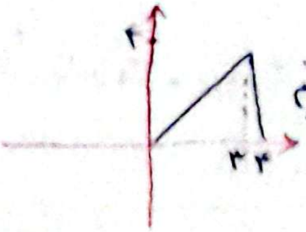
$\xrightarrow{\text{② فرمول معکوس می‌نویسیم}} \sqrt{y-\frac{7}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{x-4}$

$\Rightarrow y = (\sqrt{x-\frac{7}{4}} - \frac{1}{2})^2 + 4 \Rightarrow \sqrt{x-\frac{7}{4}} = \sqrt{x-4} + \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{7}{4} = x-4+\sqrt{x-4}+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 2 = \sqrt{x-4} \Rightarrow x-4 = 4 \Rightarrow x = 8$

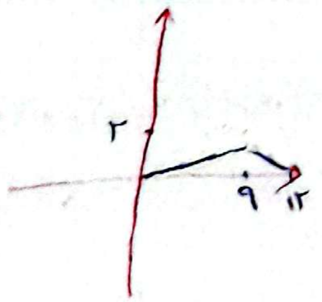
---

③

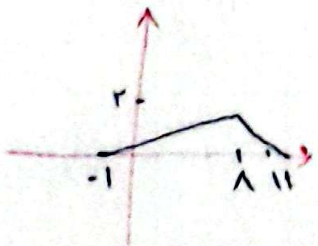


① ابتدا طول‌ها را نصف می‌کنیم

② طول‌ها را ۳ برابر می‌کنیم



③ در نهایت یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم



$S = \frac{(11-(-1)) \times 2}{2} = 12$

---

④

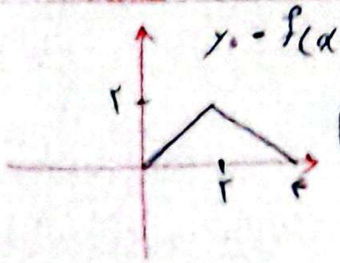
$A(2,-3)$ در $y = f(x)$ $\xrightarrow{\text{متناظر است با}}$ $A'(x',y')$ در $y = a + 2f(\frac{x-a}{2})$

$A'(x',y') \xrightarrow{\text{می‌گذرد}} y = 2x-8 \Rightarrow y' = 2x'-8$ و $\frac{x-a}{2} = 2$

---

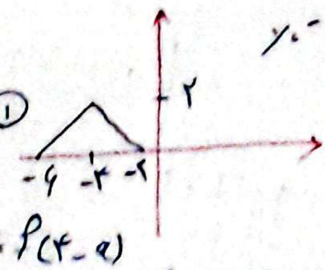
⑤

$y = -f(x-2)$



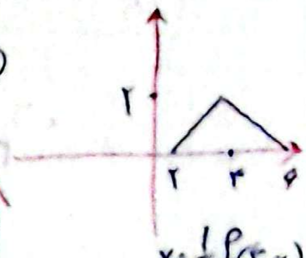
① ۶ واحد به سمت چپ می‌بریم

$y = -f(x+4)$



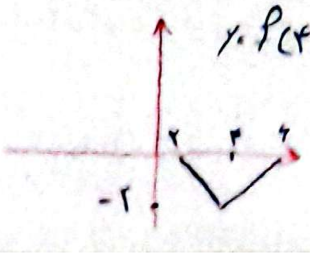
② نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم

$y = -f(4-x)$



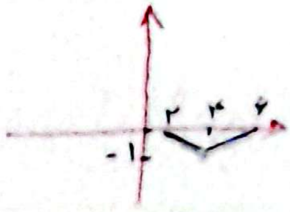
③ نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم

$y = f(4-x)$



④ در نهایت عرض‌ها را نصف می‌کنیم

$y = \frac{1}{2}f(4-x)$



⑥ در شکل مشاهده می‌شود که تابع ۳ صفر دارد، همچنین ریشه‌ی $(x+2)$، -2 است که در بازه قرار ندارد پس مجموعه ریشه‌ی $f(3x-1)$ بودند.

$y=\sqrt{-(x+2)f(3x-1)}$

$\xrightarrow{①} 3x-1=5 \Rightarrow x=2$

$\xrightarrow{②} 3x-1=2 \Rightarrow x=1$

$\xrightarrow{③} 3x-1=-1 \Rightarrow x=0$

$-2 \quad 0 \quad 1 \quad 2$: $- \; + \; - \; + \; -$ $\Rightarrow D_f=[-2,0]\cup[1,2]$

---

⑦ ۲ تابع در $x=0$ متقاطع‌اند

$f(x)=|2x-3|+1 \xrightarrow{\text{K واحد به چپ و ۳ واحد به پایین}} g(x)=|2x-3+K|-2$

$|2x-3|+1=|2x-3+K|-2 \underset{x=0}{\Longrightarrow} 4=||K-3|-2 \Longrightarrow 4=K-3-2 \Rightarrow K=9 \Longrightarrow K=9$ ✓

$4=3-K-2 \Rightarrow K=-3$ ✗ $K>0$

---

⑧ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x و y ها برابر}} f'(x)=\dfrac{\frac{-2x}{3}-1}{\frac{-x}{3}+1}=\dfrac{\frac{-2x-3}{3}}{\frac{-x+3}{3}}=\dfrac{2x+3}{x-3}$

$f'(x)+a=f(x) \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{2x+3}{x-3}+a \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{2x+3+ax-3a}{x-3}$

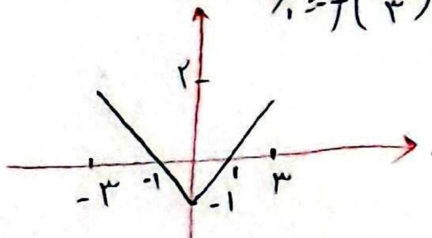
$\Rightarrow (x+1)(2x+3+ax-3a)=(2x-1)(x-3) \Rightarrow 2x^2+3x+ax^2-3ax+2x+3+ax-3a=2x^2-6x+3-x$

$\Longrightarrow ax^2+5x-2ax+3-3a=3-7x \Rightarrow ax^2+(12-2a)x-3a=0 \Rightarrow a=0$

---

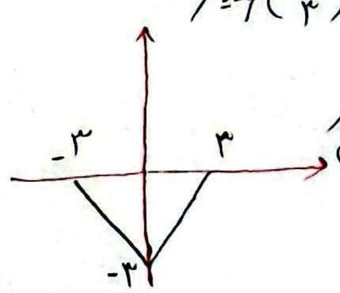
⑨

$Y_1=-f(\frac{x}{3})+2$



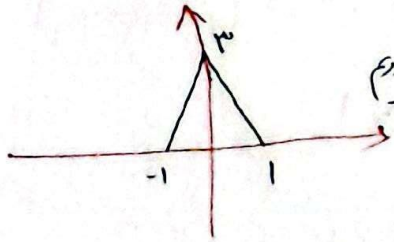
① ۲ واحد به پایین می‌رویم $\longrightarrow$

$y=-f(\frac{x}{3})$



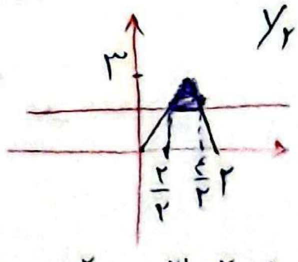
② و ③ طول نقاط را $\frac{1}{3}$ کرده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم $\longrightarrow$

$y=f(x)$



④ در نهایت ۱ واحد به راست می‌رویم $\longrightarrow$

$Y_2=f(x-1)$



$3x=2 \Rightarrow x_1=\frac{2}{3}$, $6-3x=2 \Rightarrow x_2=\frac{4}{3} \rightarrow \frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ و ارتفاع $=3-2=1 \Rightarrow S=\dfrac{\frac{2}{3}\times 1}{2}=\frac{1}{3}$

---

⑩ $S_1=\left|\dfrac{(a-2)(a-2)}{2}\right|=\dfrac{(a-2)^2}{2}$, $S_2=\left|\dfrac{((a+2)-(a-2))\times 2}{2}\right|=4$

$\Rightarrow 4+\dfrac{(a-2)^2}{2}=\dfrac{9}{2} \Rightarrow \dfrac{(a-2)^2}{2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow (a-2)^2=1 \Longrightarrow a-2=1 \Rightarrow a=3$

چون $(a-2)$ باید مثبت است $a-2=-1 \Rightarrow a=1$ ✗

$\Rightarrow f(x)=|x-3|-2 \longrightarrow f(\frac{1}{a})=|\frac{1}{3}-3|-2=|\frac{-8}{3}|-2=\frac{2}{3}$