

مسئله ۱: تابعی را در نظر بگیرید که در ادامه داریم

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

برای یافتن دامنه، مخرج را صفر نمی‌گذاریم:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

پس دامنه $\mathbb{R}$ است.

برای یافتن تصویر، فرض می‌کنیم $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ و سعی می‌کنیم x را بر حسب y پیدا کنیم:

$$y(x^2 + 1) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow yx^2 + y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (y-1)x^2 - 2x + (y-1) = 0$$

این یک معادله درجه دوم در x است. برای اینکه x حقیقی باشد، دلتا باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(y-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow 4 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - (y-1)^2 \geq 0$$

$$(y-1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2$$

پس تصویر $[0, 2]$ است.

مسئله ۲: تابعی را در نظر بگیرید که در ادامه داریم

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

برای یافتن دامنه، عبارت زیر رادیکال را بررسی می‌کنیم:

$$x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq -1$$

این برای تمام $x \in \mathbb{R}$ برقرار است. پس دامنه $\mathbb{R}$ است.

برای یافتن تصویر، فرض می‌کنیم $y = \sqrt{x^2 + 1}$ و سعی می‌کنیم x را بر حسب y پیدا کنیم:

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y^2 - 1$$

برای اینکه x حقیقی باشد، باید $y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 1 \Rightarrow y \geq 1$ (چون $y \geq 0$).

پس تصویر $[1, \infty)$ است.

مسئله ۳: تابعی را در نظر بگیرید که در ادامه داریم

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

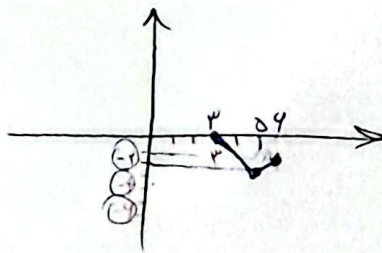
برای یافتن دامنه، مخرج را صفر نمی‌گذاریم:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

پس دامنه $\mathbb{R}$ است.

$$\left. \begin{array}{l} r = \frac{1}{r} \leftarrow \text{obj } r \text{ del } \leftarrow (b = 1) \\ a = -r \end{array} \right\} b - a = 1 - (-r) = 4$$

$$r - f(3-1) \xrightarrow{\text{قرینه ریاضی}} r - f(-1-1) \xrightarrow{\text{قرینه ریاضی}} r - f(1-1) \xrightarrow{\text{قرینه ریاضی}} f(1-1) + 2$$



$$dy \rightarrow y \leq x-1 \leq 0$$

$$y_1 \rightarrow x-1 \rightarrow [-2, -1] + 1 \rightarrow [-2, 0]$$

$$y + \left| \frac{y-1}{y-1} \right| + 1 < 0$$

$$\frac{y-1}{y^2-y} = -y-1 = \frac{-y^2+y-y^2+y}{y^2-y} = \frac{-2y^2+2y}{y^2-y} = \frac{-2y(y-1)}{y(y-1)} = \frac{-2y}{y} = -2$$

→ $x^2 \leq y^2 \Rightarrow x \in [-y, y] \Rightarrow (-\sqrt{y}, \sqrt{y}) \rightarrow (-\infty, -\sqrt{y}) \leftarrow \text{حواص}$

$\sqrt{\gamma \mu f - p^2} \rightarrow \sqrt{f(\gamma \mu - p)}$