۱)
$D_{gof} = \{x \mid x\in D_f \,,\, f\in D_g\}$

$\Rightarrow D_f \Rightarrow$ I) $x-۱>0 \Rightarrow x>۱$ II) $\log_۲^{x-۱} \geq 0 \Rightarrow x-۱\geq ۱ \Rightarrow x\geq ۲ \Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$

$D_g \Rightarrow -(x^۲-۴x+۴) \geq 0 \Rightarrow -(x-۲)^۲ \geq 0 \Rightarrow x=۲ \Rightarrow D_g=\{۲\}$

$\Rightarrow D_{fog}: \sqrt{\log_۲^{x-۱}} = ۲ \Rightarrow \log_۲^{x-۱}=۴ \Rightarrow x-۱=۱۶ \Rightarrow x=۱۷ \Rightarrow \boxed{D_{fog}=\{۱۷\}}$

۲)
$fog(x)=f(g(x))=f(x^۲-۳x+۸)=۲(x^۲-۳x+۸)-۵=۲x^۲-۶x+۱۱=fog(x)$

$gof(x)=g(f(x))=g(۲x-۵)=(۲x-۵)^۲-۳(۲x-۵)+۸=۴x^۲-۲۰x+۲۵-۶x+۱۵+۸$

$=۴x^۲-۲۶x+۴۸$

$\Rightarrow fog(x)=gof(x) \Rightarrow ۲x^۲-۶x+۱۱=۴x^۲-۲۶x+۴۸ \Rightarrow ۲x^۲-۲۰x+۳۷=0$

$S=-\frac{b}{a}=۱۰ \,,\, P=\frac{۳۷}{۲} \Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P \Rightarrow ۱۰۰-۲\times\frac{۳۷}{۲}=\boxed{۶۳}$

۳)
$gof(x)=g(f(x))=g(۲x)=۵(x)^۲+۱۱ \Rightarrow g(x)=۵(\frac{x}{۲})^۲+۱۱=\frac{۵x^۲}{۴}+۱۱$

$g(x)=\frac{۵x^۲}{۴}+۱۱ \Rightarrow g(x-۷)=\frac{۵(x-۷)^۲}{۴}+۱۱ \Rightarrow \frac{۵(x^۲-۱۴x+۴۹)+۴۴}{۴}$

$\Rightarrow \frac{۵x^۲-۷۰x+۲۸۹}{۴} \Rightarrow \frac{۵}{۴}x^۲-\frac{۷۰}{۴}x+\frac{۲۸۹}{۴}=g(x-۷)$

$Min(g(x-۷)) \Rightarrow x_s=\frac{\frac{۷۰}{۴}}{\frac{۵}{۲}}=۷ \Rightarrow y_s=\frac{۵}{۴}\times۴۹-\frac{۷۰}{۴}\times۷+\frac{۲۸۹}{۴}=\frac{۴۴}{۴}=\boxed{۱۱}$

۴)
$fog(x)=f(g(x))=۳g-۴=۳x^۲-۶x-۱ \Rightarrow ۳g=۳x^۲-۶x+۳ \Rightarrow g=x^۲-۲x+۱$

$\boxed{gof(x)=g(f(x))=g(۳x-۴)=(۳x-۴-۱)^۲=(۳x-۵)^۲=۹x^۲-۳۰x+۲۵=gof(x)}$

۵)
$f-g=-x+۵ \,,\, ۲g=۳f-۱۴ \Rightarrow g=\frac{۳}{۲}f-۷$

$\Rightarrow f-g \xrightarrow{g=\frac{۳}{۲}f-۷} f-\frac{۳}{۲}f+۷=-x+۵ \Rightarrow f=۲x+۴ \Rightarrow g(x)=۳x-۱$

$fog(x)=f(g(x))=f(۳x-۱)=۲(۳x-۱)+۴=۶x-۲+۴=۶x+۲=fog(x)$

$\Rightarrow ۶a+۲=0 \Rightarrow ۶a=-۲ \Rightarrow \boxed{a=-\frac{۱}{۳}}$

/ / سلطان نجفی

⑥ $g\circ f(x)=g(f(x))=g(9^x)=\log_3 9^x=\log_3 3^{2x}=2x$

$f\circ g(x)=f(g(x))=f(\log_3 x)=9^{\log_3 x}=x^{\log_3 9}=x^2\ (x>0)$

$f\circ g(x)\leq g\circ f(x)\Rightarrow x^2\leq 2x\Rightarrow x^2-2x\leq 0\Rightarrow \begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & \\ + & \phi & - & \phi & + \end{array}\Rightarrow \boxed{x\in(0,2]}$

~~...~~ صفر نمی‌تواند باشد زیرا در دامنه تابع fog قرار ندارد

⑦ $f(x-\frac{2}{x})=\underbrace{x^2-4+\frac{4}{x^2}}_{(x-\frac{2}{x})^2}+x-\frac{2}{x}\xrightarrow{x-\frac{2}{x}=t}f(t)=t^2+t$

$\Rightarrow f(x)=x^2+x$

⑧ $A=D_{f\circ g}=\{x\mid x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}$

$\Rightarrow D_g=\mathbb{R}\ ,\ D_f=(0,+\infty)\Rightarrow g(x)\in D_f\Rightarrow 8x-x^2>0\ \begin{array}{ccccc} & 0 & & 8 & \\ - & \phi & + & \phi & - \end{array}\Rightarrow x\in(0,8)$

$\Rightarrow A=(0,8)$

$R_{f\circ g}=\{(x,y)\mid x\in R_g\cap D_f\}\Rightarrow R_g\Rightarrow \frac{-b}{2a}=x_s=\frac{-8}{-2}=4\Rightarrow y_s=-16+32=16$

$\Rightarrow R_g=(-\infty,16]$

$\Rightarrow R_g\cap D_f=(-\infty,16]\cap(0,+\infty)=(0,16]\Rightarrow$ تابع f اکیداً صعودی است و برای بدست آوردن برد آن کافی است ۲ سر دامنه را قرار دهیم

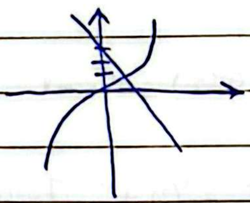
$\Rightarrow R_{f\circ g}=(-\infty,4]=B$

$\Rightarrow A\cap B=(-\infty,4]\cap(0,8)=\boxed{(0,4]}$

⑨ $f\circ f(x)=f(f(x))=1-3f^2(x)\xrightarrow{f(x)=t}f(t)=1-3t^2\Rightarrow f(x)=1-3x^2$

$h(g(x))=h(x-1)=(x-1)^3+2(x-1)+1=x^3-3x^2+3x-1+2x-2+1$

$\Rightarrow x^3-3x^2+5x-2=1-3x^2\Rightarrow x^3+5x=3\Rightarrow x^3=-5x+3$



$\boxed{\text{۱ ریشه دارد}}$

⑩ $g\circ f(x)=g(f(x))=g(x-\frac{4}{x})=ax^3+2x$

$x-\frac{4}{x}=3\xrightarrow{\times x}x^2-3x-4=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=4\end{cases}$

I) $x=-1\Rightarrow g\circ f(-1)=g(3)=8=-a-2\Rightarrow 10=-a\Rightarrow\boxed{a=-10}$

II) $x=4\Rightarrow g\circ f(4)=g(3)=8=64a+8=8\Rightarrow\boxed{a=0}$