آمار آزادنیا   تکلیف شماره ۸   گروه دوازدهم ریاضی A

(۱)
$g(x)=\sqrt{-x^2+4x-4} \Rightarrow -x^2+4x-4\geq 0 \Rightarrow -\overbrace{\underbrace{(x-2)^2}_{\text{همواره مثبت}}}^{\text{همواره نامثبت}}\geq 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

$f(x)=2 \Rightarrow \sqrt{\log_2^{x-1}}=2 \Rightarrow \log_2^{x-1}=4 \Rightarrow 2^4=x-1 \Rightarrow x=\underline{17}$

---

(۲)
$g\circ f=(2x-5)^2-3(2x-5)+8=4x^2-20x+25-6x+15+8=4x^2-26x+48$

$f\circ g=2(x^2-3x+8)-5=2x^2-6x+11$

$\Rightarrow 2x^2-6x+11=4x^2-26x+48 \Rightarrow 2x^2-20x+37=0$

$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=10,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{37}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=(10)^2-2(\frac{37}{2})=100-37=\underline{63}$

---

(۳)
$g(f(x))=5x^2+11$ و $f(x)=2x \Rightarrow g(2x)=5x^2+11 \Rightarrow g(x)=\frac{5}{4}x^2+11$ $\quad a>0$

کمترین مقدار $=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{55-0}{5}=11$

$\min g=\underline{11}$ ⇐ چون $g(x-7)$ تبدیل طولی بوده پس تغییری در عرض نمی‌شود

---

(۴)
$f(g(x))=3x^2-6x-1$ و $f(x)=3x-4 \Rightarrow 3(g(x))-4=3x^2-6x-1 \Rightarrow g(x)=x^2-2x+1$

$g(f(x))=(3x-4)^2-2(3x-4)+1=9x^2-24x+16-6x+8+1=9x^2-30x+25$

---

(۵)
$f-g=ax+b,\ a=\frac{5-0}{0-5}=-1,\ b=5 \Rightarrow f-g=-x+5,\ \begin{cases}2g-3f=-14\\ 3f-2g=14\end{cases}\ -2g+2f=10-2x \Rightarrow \begin{cases}f(x)=2x+4\\ g(x)=3x-1\end{cases}$

$\Rightarrow f\circ g=2(3x-1)+4=6x+2 \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow 6x=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

---

(۶)
$g(x)=\log_3^x$ و $f(x)=9^x \Rightarrow f(g(x))=9^{\log_3^x}=x^2$ و $g(f(x))=\log_3^{9^x}=2x$

$g(f(x))\geq f(g(x)) \Rightarrow 2x\geq x^2 \Rightarrow 2x-x^2\geq 0$ $\quad$ $0\quad 2$: $-\ \ +\ \ -$ (در دامنه نیست) $\Rightarrow x\in(0,2]$

---

(۷)
$f(\underbrace{\frac{x^2-2}{x}}_{t})=x^2+x-4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=x-\frac{2}{x}+x^2+\frac{4}{x^2}-4=\frac{x^2-2}{x}+\frac{x^4-4x^2+4}{x^2}$

$f(t)=t^2+t \Rightarrow f(x)=x^2+x$

---

(۸)
$g(x)=8x-x^2,\ f(x)=\log_2^x \Rightarrow f(g(x))=\log_2^{8x-x^2} \Rightarrow 8x-x^2>0$ $\quad$ $0\quad 8$: $-\ \ +\ \ -$ (قابل قبول) $\quad D_{f\circ g}=(0,8)$

$R_g=(-\infty,16] \Rightarrow \log_2^{8x-x^2}=\log_2^{(-\infty,16]} \Rightarrow R_{f\circ g}=[0,4]$

اعضای صحیح
$[0,4]\cap(0,8)=(0,4]=\{1,2,3,4\}$

(9)

$f(f(x)) = 1 - 3f^2(x)$ و $g(x) = x - 1$, $h(x) = x^3 + 2x + 1$

$f(f(x)) = f(t) = 1 - 3t^2 \Rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$ و $f(x) = h(g(x)) \Rightarrow 1 - 3x^2 = (x-1)^3 + 2(x-1) + 1$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x - 2 + 1 = 1 - \cancel{3x^2} \Rightarrow x^3 + 5x - 3 = 0$

تابع متناظر معادله صعودی است و حداکثر یک ریشه دارد.

---

(10)

$f(x) = x - \frac{4}{x}$ و $g(f(x)) = ax^3 + 2x$ و $g(3) = 8$

ریشه مخرج $\cancel{4}$

$g(f(x)) = g(x - \frac{4}{x}) = g(3) \Rightarrow x - \frac{4}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4, -1$

$g(3) = g(f(-1)) = ax^3 + 2x = -a + 2 = 8 \Rightarrow a = -6$