Subject: Date:

Mo Tu We Th Fr Sa Su

A پرس ۱۲ شتیا بهرامی 19 تکلیف ۸

①

f: شرط دامنه:

$\log_2^{x-1} \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 2^0 = 1 \Rightarrow x \geq 2$

$D_f = [2, +\infty)$

g: $g(x) = \sqrt{-(x-2)^2}$

شرط دامنه $-(x-2)^2 \geq 0$

می‌دانیم: (توان‌های زوج همواره نامنفی‌اند) $(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x-2)^2 \leq 0$ $\Rightarrow x = 2$

$D_g = \{2\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$x \in [2, +\infty)$ و $\sqrt{\log_2^{x-1}} = 2$

$\Rightarrow \log_2^{x-1} = 4 \Rightarrow x-1 = 2^4 = 16$

$\Rightarrow x = 17 \Rightarrow x \in \{17\}$

اکنون از دو بازه‌ی بالا اشتراک می‌گیریم:

$D_{gof} = [2, +\infty) \cap \{17\} = \boxed{\{17\}}$

---

②

$fog(x) = 2g(x) - 5 = 2(x^2 - 3x + 8) - 5 = 2x^2 - 6x + 11$

$gof(x) = f^2(x) - 3f(x) + 8 = (2x-5)^2 - 3(2x-5) + 8 = 4x^2 - 26x + 48$

$fog(x) = gof(x) \Rightarrow 2x^2 - 6x + 11 = 4x^2 - 26x + 48 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 37 = 0$

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی بالا باشند داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{(-20)}{(2)} = 10 \\ \alpha\beta = \dfrac{(37)}{(2)} = \dfrac{37}{2} \end{cases}$$

$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \underbrace{10^2}_{100} - \underbrace{2\left(\frac{37}{2}\right)}_{-37}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 63}$

6

---

③

$gof(x) = g(2x) = 5x^2 + 11 \xrightarrow{\text{انبساط طولی}} g(x) = 5\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 11 = \frac{5}{4}x^2 + 11$

$\xrightarrow[\text{۷ واحد به سمت راست}]{\text{انتقال طولی}} g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11 \Rightarrow$ رأس سهمی $= (7, 11)$

چون ضریب x^2 در سهمی $g(x-7)$ مثبت است عرض رأس سهمی همان کمترین مقدار تابع است $\Leftarrow$ کمترین مقدار این تابع 11 است

2

PINE NOTEBOOK

Subject: .... Date: ....

Mo Tu We Th Fr Sa Su

~~$gof(x) = g(3x-4) = (3x-4-1)^2$~~ ۴

$\cancel{3g(x)}$ $fog(x) = 3x^2-6x-1 = f(g(x)) = 3g(x)-4 \Rightarrow g(x) = x^2-2x+1 = (x-1)^2$ ۴

$gof(x) = g(3x-4) = (3x-4-1)^2 = \boxed{(3x-5)^2 = 9x^2-30x+25}$

۲

$(f-g)(x)$ شیب $= \frac{0-5}{5-0} = -1$ ۵

$(f-g)(x)$ عرض از مبدا $= 5$

$\Rightarrow (f-g)(x) = -x+5 = f(x)-g(x)$

$2g(x) = 3f(x)-14 \Rightarrow g(x) = \frac{3}{2}f(x) - 7$

$\Rightarrow -x+5 = f(x) - \frac{3}{2}f(x) + 7$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}f(x) = -x-2$

$\Rightarrow f(x) = 2x+4 \Rightarrow g(x) = \frac{3}{2}(2x+4) - 7 = 3x-1$

۲

$fog(x) = 2(3x-1)+4 = 6x+2 \Rightarrow fog(a) = 0 \Rightarrow 6a+2=0 \Rightarrow 6a=-2 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{3}}$

$fog(x) = 9^{\overset{g(x)}{\log_3 x}} = x^{\log_3 9} = x^2$ ~~$(D_{fog}$~~ ۶

$gof(x) = \log_3 f(x) = \log_3 9^x = \log_3 3^{2x} = 2x\log_3 3 = 2x$

۲

$gof(x) \geq fog(x) \Rightarrow 2x \geq x^2 \Rightarrow x^2-2x \leq 0$

ریشه‌ها ۰ و ۲

	۰		۲	
+		−		+

$\Rightarrow x \in [0,2]$

$fog(x) = 9^{\log_3 x} \Rightarrow D_{fog} = (0,+\infty)$, $gof = \log_3 9^x \Rightarrow D_{gof} = (0,+\infty)$

$\Rightarrow$ B جواب نهایی: $\boxed{x \in (0,2]}$: اشتراک D_{gof} ، D_{fog} و جواب نامعادله می‌شود:

(باید fog و gof هر دو تعریف شوند و سپس نامعادله برقرار باشد)

$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right) = f\left(x-\frac{2}{x}\right) = \underbrace{x^2+\frac{4}{x^2}-4}_{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2} + \left(x-\frac{2}{x}\right) \Rightarrow f(x) = x^2+x$ ۷

۲

PINE NOTEBOOK

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_f = (0,+\infty)$ ۸

$x \in \mathbb{R}$ | $g(x) > 0 \Downarrow 8x - x^2 > 0 \Downarrow -x(x-8) > 0 \Rightarrow x \in (0,8)$

(دامنه شرط ندارد) ($\log_2 \frac{x}{2} \Rightarrow x>0$)

	0		8	
−		+		−

۱

اشتراک دو بازه: $D_{fog} = A = (0,8)$

$fog(x) = \log_2 g(x) = \log_2 (8x - x^2)$, $8x - x^2$:
- $\frac{-8}{2(-1)} = 4$ طول رأس سهمی $\rightarrow 8(4)-(4)^2 = 16$
- 0 کمترین مقدار $\rightarrow 8(0)-(0)^2 = 0$
- 8 کمترین مقدار $\rightarrow 8(8)-(8)^2 = 0$

$\Rightarrow 8x - x^2 \in [0,16]$

$\Rightarrow 0 < 8x - x^2 \le 16 \Rightarrow \cancel{\log_2 0} < \log_2 (8x-x^2) \le \log_2 16 \Rightarrow R_{fog} = B = (1,4]$

$B = (-\infty, 4]$

$A \cap B = (0,8) \cap (1,4] \Rightarrow \boxed{(1,4]}$ $A \cap B = (0,4] \rightarrow$ ۴ عضو صحیح

۹

$fof(x) = f(f(x)) = 1 - 3(f(x))^2 \Rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$

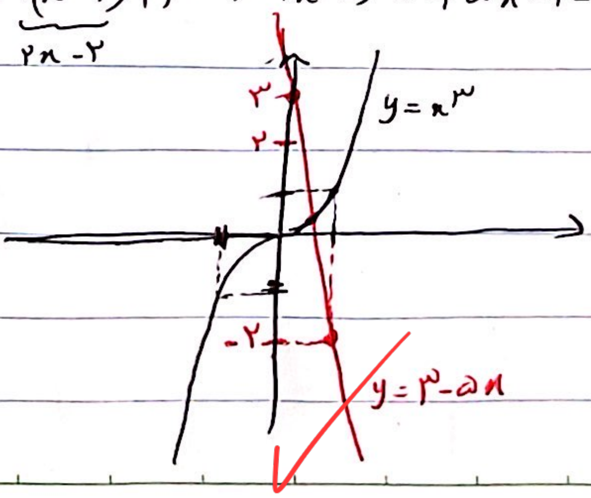
$h(\underbrace{g(x)}_{x-1}) = f(x) \Rightarrow \underbrace{(x-1)^3}_{x^3-3x^2+3x-1} + 2\underbrace{(x-1)}_{2x-2} + 1 = 1 - 3x^2 \Rightarrow x^3 + 5x - 3 = 0$

$\Rightarrow x^3 = 3 - 5x$

یک نقطه برخورد دارد

(یک جواب دارد)

۲



Subject: Date:

Mo Tu We Th Fr Sa Su

$$g\left(x-\frac{4}{x}\right)=ax^3+2x$$ ۱۰

$$g(3)=8 \Rightarrow x-\frac{4}{x}=3 \Rightarrow x^2-4=3x \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow g\circ f(-1)=g(3)=8 \\ x=4 \Rightarrow g\circ f(4)=g(3)=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1;\ a(-1)^3+2(-1)=8 \Rightarrow -a-2=8 \Rightarrow \boxed{a=-10} \\ x=4;\ a(4)^3+2(4)=8 \Rightarrow 64a+8=8 \Rightarrow 64a=0 \Rightarrow \boxed{a=0} \end{cases}$$

دو مقدار برای a ممکن هست ۲

PINE NOTEBOOK