A ۱۲ — شنتیا بهرامی — تکلیف ۸

(1)

f: شرط دامنه:

$\log_2^{x-1} \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 2^0=1 \Rightarrow x \geq 2$

$D_f = [2,+\infty)$

g: $g(x)=\sqrt{-(x-2)^2}$

شرط دامنه $-(x-2)^2 \geq 0$

می‌دانیم: $(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x-2)^2 \leq 0$ (توان‌های زوج همواره نامنفی‌اند) $\Rightarrow x=2$

$D_g = \{2\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$\sqrt{\log_2^{x-1}} = 2$

$\Rightarrow \log_2^{x-1} = 4 \Rightarrow x-1 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = 17 \Rightarrow x \in \{17\}$

$x \in [2,+\infty)$

اکنون از دو بازه‌ها اشتراک می‌گیریم:

$D_{gof} = [2,+\infty) \cap \{17\} = \boxed{\{17\}}$

(2)

$fog(x) = 2g(x)-5 = 2(x^2-3x+8)-5 = 2x^2-6x+11$

$gof(x) = f^2(x) - 3f(x) + 8 = (2x-5)^2 - 3(2x-5) + 8 = 4x^2 - 26x + 48$

$fog(x) = gof(x) \Rightarrow 2x^2-6x+11 = 4x^2-26x+48 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 37 = 0$

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی بالا باشند داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{(-20)}{(2)} = 10 \\ \alpha\beta = \dfrac{(37)}{(2)} = \dfrac{37}{2} \end{cases}$$

$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2+\beta^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = \underbrace{10^2}_{100} - \underbrace{2\left(\tfrac{37}{2}\right)}_{-37}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha^2+\beta^2 = 63}$

(3)

$gof(x) = g(2x) = 5x^2+11 \xrightarrow[\text{انبساط طول‌ها}]{} g(x) = 5(\tfrac{1}{2}x)^2+11 = \tfrac{5}{4}x^2+11$

$\xrightarrow[\text{۷ واحد به سمت راست}]{\text{انتقال طول‌ها}} g(x-7) = \tfrac{5}{4}(x-7)^2+11 \Rightarrow$ رأس سهمی $= (7,11)$

چون ضریب x^2 در سهمی $g(x-7)$ مثبت است عرض رأس سهمی همان کمترین مقدار سهمی است $\Leftarrow$ $\boxed{\text{کمترین مقدار این تابع } 11 \text{ است}}$

(۴)

$\cancel{g\circ f(x)=g(3x-4)=(3x-4-1)^2}$

---

(۴)

$\cancel{3g(x)}$ $f\circ g(x)=3x^2-6x-1=f(g(x))=3g(x)-4 \Rightarrow g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

$g\circ f(x)=g(3x-4)=(3x-4-1)^2=\boxed{(3x-5)^2=9x^2-30x+25}$

---

(۵)

$(f-g)(x)$ شیب $=\dfrac{0-5}{5-0}=-1$

$(f-g)(x)$ عرض از مبدأ $=5$

$\Rightarrow (f-g)(x)=-x+5=f(x)-g(x)$

$2g(x)=3f(x)-14 \Rightarrow g(x)=\frac{3}{2}f(x)-7$

$\Rightarrow -x+5=f(x)-\frac{3}{2}f(x)+7$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}f(x)=-x-2$

$\Rightarrow f(x)=2x+4 \Rightarrow g(x)=\frac{3}{2}(2x+4)-7=3x-1$

$f\circ g(x)=2(3x-1)+4=6x+2 \Rightarrow f\circ g(a)=0 \Rightarrow 6a+2=0 \Rightarrow 6a=-2 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{3}}$

---

(۶)

$g(x)\leftarrow \log_3^x$

$f\circ g(x)=9^{\log_3^x}=x^{\log_3^9}=x^2$ $(D_{f\circ g}$

$g\circ f(x)=\log_3^{f(x)}=\log_3^{9^x}=\log_3^{3^{(2x)}}=2x\log_3^3=2x$

$g\circ f(x)\geq f\circ g(x) \Rightarrow 2x\geq x^2 \Rightarrow x^2-2x\leq 0$: ریشه‌ها ۰ و ۲

	0		2	
+		−		+

$\Rightarrow x\in[0,2]$

$f\circ g(x)=9^{\log_3^x} \Rightarrow D_{f\circ g}=(0,+\infty)$, $g\circ f=\log_3^{9^x} \Rightarrow D_{g\circ f}=(0,+\infty)$

اشتراک $D_{g\circ f}$ ، $D_{f\circ g}$ و جواب نامعادله می‌شود : $\boxed{x\in(0,2]}$: جواب نهایی $\Rightarrow$

(باید fog و gof در مرحله اول، تعریف شوند و سپس نامعادله برقرار باشد)

---

(۷)

$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right)=f\left(x-\frac{2}{x}\right)=\underbrace{x^2+\frac{4}{x^2}-4}_{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}+\left(x-\frac{2}{x}\right) \Rightarrow f(x)=x^2+x$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$, $D_g = \mathbb{R}$, $D_f = (0,+\infty)$ ۱

$x \in \mathbb{R}$ | $g(x) > 0 \Downarrow ۸x - x^۲ > 0 \Downarrow$ ~~...~~ $-x(x-۸) > 0$ | (دامنه ی f لگ دارد) (f لگ $\Rightarrow x>0$)

	۰		۸	
$-$		$+$		$-$

$\Rightarrow x \in (۰,۸)$

اشتراک دو بازه: $D_{fog} = A = (۰,۸)$

$fog(x) = \log_۲ g(x) = \log_۲ (۸x - x^۲)$, $۸x - x^۲$:

- طول رأس $-\frac{۸}{۲(-۱)} = ۴$ → $۸(۴) - (۴)^۲ = ۱۶$
- ۰ کمترین مقدار → $۸(۰) - (۰)^۲ = ۰$
- ۸ کمترین مقدار → $۸(۸) - (۸)^۲ = ۰$

$\Rightarrow ۸x - x^۲ \in [۰,۱۶]$

$\Rightarrow ۰ < ۸x - x^۲ \le ۱۶ \Rightarrow \cancel{\log_۲ ۰} < \log_۲ (۸x - x^۲) \le \log_۲ ۱۶ \Rightarrow R_{fog} = B = (۱,۴]$

$A \cap B = (۰,۸) \cap (۱,۴] \Rightarrow = \boxed{(۱,۴]}$

۹

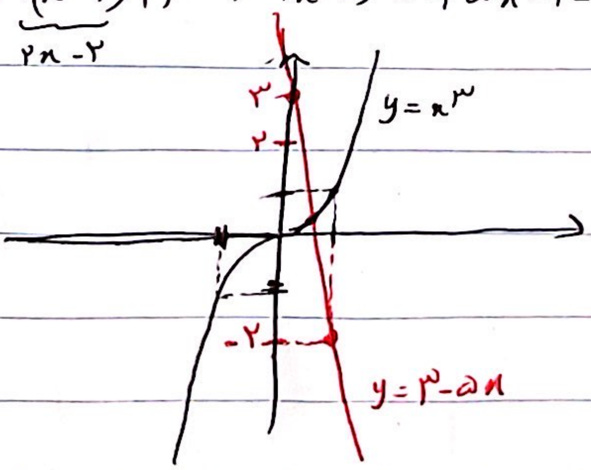
$fof(x) = f(f(x)) = ۱ - ۳(f(x))^۲ \Rightarrow f(x) = ۱ - ۳x^۲$

$h(\underbrace{g(x)}_{x-۱}) = f(x) \Rightarrow \underbrace{(x-۱)^۳}_{x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱} + ۲\underbrace{(x-۱)}_{۲x-۲} + ۱ = ۱ - ۳x^۲ \Rightarrow x^۳ + ۵x - ۳ = ۰$

$\Rightarrow x^۳ = ۳ - ۵x$

یک نقطه برخورد دارد

(یک جواب دارد)



Subject: Date:

Mo Tu We Th Fr Sa Su

15

$$g\left(x-\frac{4}{x}\right)=ax^3+2x$$

$$g(3)=8 \Rightarrow x-\frac{4}{x}=3 \Rightarrow x^2-4=3x \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow g\circ f(-1)=g(3)=8 \\ x=4 \Rightarrow g\circ f(4)=g(3)=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1;\ a(-1)^3+2(-1)=8 \Rightarrow -a-2=8 \Rightarrow \boxed{a=-10} \\ x=4;\ a(4)^3+2(4)=8 \Rightarrow 64a+8=8 \Rightarrow 64a=0 \Rightarrow \boxed{a=0} \end{cases}$$

دو مقدار برای a ممکن است

PINE NOTEBOOK