ایلیا سالاری

تکلیف شماره ۸

دوازدهم بسر A

---

①

$f(x)=\sqrt{\log_{۲}^{(x-۱)}}$ $\quad g(x)=\sqrt{-x^۲+۴x-۴}=\sqrt{-(x-۲)^۲}$ $\quad D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

$g(f(x))=\sqrt{-\left(\sqrt{\log_{۲}^{x-۱}}-۲\right)^۲} \Rightarrow -\left(\sqrt{\log_{۲}^{x-۱}}-۲\right)^۲\geq ۰ \Rightarrow \left(\sqrt{\log_{۲}^{x-۱}}-۲\right)^۲\leq ۰ \Rightarrow \sqrt{\log_{۲}^{x-۱}}-۲=۰ \Rightarrow$

$\log_{۲}^{x-۱}=۴ \Rightarrow x-۱=۲^۴=۱۶ \Rightarrow x=۱۷$ $\qquad \log_{۲}^{x-۱}\geq ۰ \Rightarrow x-۱\geq ۱ \Rightarrow x\geq ۲$

$D_{gof}=\{۱۷\}$

---

②

$f(x)=۲x-۵ \quad g(x)=x^۲-۳x+۸$ $\qquad fog(x)=gof(x) \Rightarrow ۲(x^۲-۳x+۸)=(۲x-۵)^۲-۳(۲x-۵)+۸ \Rightarrow$

$\Rightarrow ۴x^۲-۲۶x+۴۸=۲x^۲-۶x+۱۱ \Rightarrow ۲x^۲-۲۰x+۳۷=۰ \Rightarrow$ $\quad \alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=۱۰۰-۳۷=۶۳$

---

③

$gof(x)=۵x^۲+۱۱ \quad f(x)=۲x$ $\qquad ۲x=t \Rightarrow x=\frac{t}{۲}$ $\quad g(x)=۵\left(\frac{t}{۲}\right)^۲+۱۱=\frac{۵t^۲}{۴}+۱۱ \Rightarrow$

$g(x)=\frac{۵x^۲}{۴}+۱۱$

$g(x-۷)=\frac{۵(x-۷)^۲}{۴}+۱۱=\frac{۵x^۲+۲۴۵-۷۰x+۴۴}{۴}=\frac{۵x^۲+۲۸۹-۷۰x}{۴}$

$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۷۰}{۱۰}=۷ \Rightarrow y=\frac{۵(۴۹)+۲۸۹-۷۰(۷)}{۴}=\frac{۴۴}{۴}=۱۱$

---

④

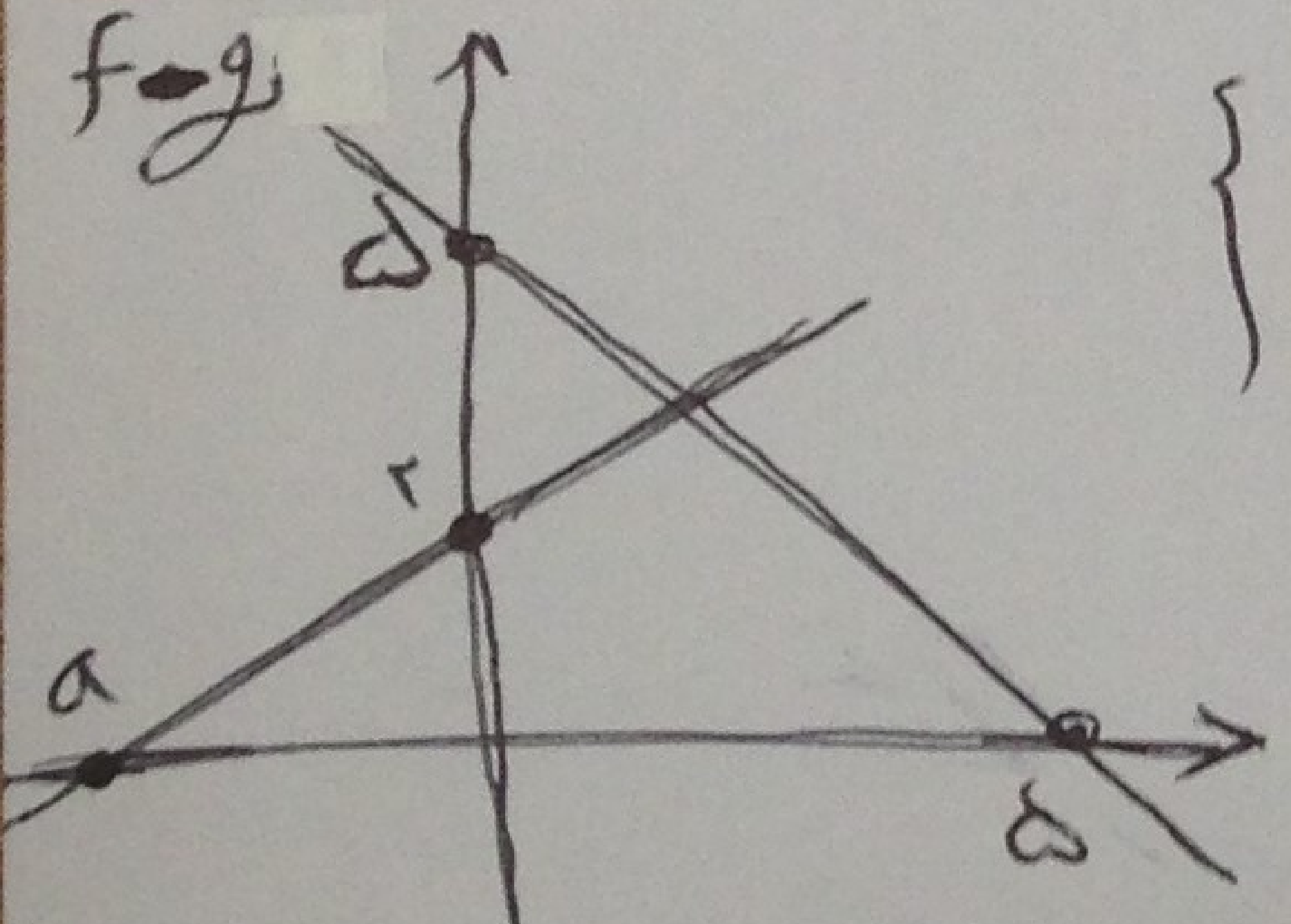
$f(x)=۳x-۴ \qquad fog(x)=۳x^۲-۶x-۱$

$f(g(x))=۳(g(x))-۴=۳x^۲-۶x-۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۳x^۲-۶x+۳}{۳}=x^۲-۲x+۱$

$g(f(x))=(۳x-۴)^۲-۲(۳x-۴)+۱=۹x^۲+۱۶-۲۴x-۶x+۸+۱=۹x^۲-۳۰x+۲۵$

---

⑤



$\begin{cases} ۲f(x)-۲g(x)=-۲x+۱۰ \\ ۳f(x)-۲g(x)=۱۴ \end{cases} \Rightarrow +f(x)=۲x+۴ \Rightarrow g(x)=۳x-۱$

$fog(x)=۲(۳x-۱)+۴=۶x+۲ \Rightarrow ۶(a)+۲=۰ \Rightarrow ۶a=-۲ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$

---

⑥

$f(x)=۹^x \qquad g(x)=\log_{۳}^{x} \qquad fog(x)=۹^{\log_{۳}^{x}}=x^{\log_{۳}^{۹}}=x^۲$

$gof(x)=\log_{۳}^{۹^x}=x\log_{۳}^{۹}=۲x$ $\qquad gof(x)\geq fog(x) \Rightarrow ۲x\geq x^۲ \Rightarrow ۲x-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x(۲-x)\geq ۰$

$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} & ۰ & & ۲ & \\ \hline - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow [۰،۲]$

---

⑦

$\underbrace{f\left(\frac{x^۲-۲}{x}\right)}=x^۲+x-۴-\frac{۲}{x}+\frac{۴}{x^۲}=x^۲+\frac{۴}{x^۲}-۴+x-\frac{۲}{x}=$

$\frac{x^۲-۲}{x}=x-\frac{۲}{x}=t$

$=\left(x-\frac{۲}{x}\right)^۲+x-\frac{۲}{x}=t^۲+t \Rightarrow f(x)=x^۲+x$

---

⑧

$f(x)=\log_{۲}^{x} \quad g(x)=۸x-x^۲$

$A=D_{fog} \qquad B=R_{fog}$

$fog(x)=\log_{۲}^{۸x-x^۲}$ $\qquad ۸x-x^۲>۰ \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & ۰ & & ۸ & \\ \hline - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow D_{fog}=A=(۰،۸)$

$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۸}{۲}=۴ \Rightarrow y=۸(۴)-(۴)^۲=۳۲-۱۶=۱۶ \xRightarrow{\log} R_{fog}=B=(-\infty،۴]$

$A\cap B=(۰،۴]$

شامل $\{۱،۲،۳،۴\}$

⑨

$f\circ f(x) = ۱ - ۳f^{۲}(x) \quad g(x) = x - ۱ \quad h(x) = x^{۳} + ۲x + ۱$

$f\circ f(x) = ۱ - ۳f^{۲}(x) \Rightarrow f(x) = ۱ - ۳x^{۲} \quad h\circ g(x) = (x-۱)^{۳} + ۲(x-۱) + ۱ = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - ۱ + ۲x - ۲ + ۱ =$

$x^{۳} - ۳x^{۲} + ۵x - ۲ = h\circ g(x) \quad h\circ g(x) = f(x) \Rightarrow x^{۳} - ۳x^{۲} + ۵x - ۲ = ۱ - ۳x^{۲} \Rightarrow x^{۳} + ۵x - ۳ = ۰ \Rightarrow$

چون درجه <u>۳</u> است، محور x ها را <u>یکبار</u> قطع می‌کند.

---

⑩

$g(۳) = ۸$

$f(x) = x - \frac{۴}{x} \quad g\circ f(x) = ax^{۳} + ۲x \quad g(۳) \Rightarrow x - \frac{۴}{x} = ۳ \Rightarrow \frac{x^{۲} - ۴}{x} = ۳ \Rightarrow x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+۱)(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = \{-۱, ۴\} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \Rightarrow g(۳) = ۸ \Rightarrow -a - ۲ = ۸ \Rightarrow a = -۱۰ \\ x = ۴ \Rightarrow g(۳) = ۸ \Rightarrow ۶۴a + ۸ = ۸ \Rightarrow a = ۰ \end{cases} \quad a = \{-۱۰, ۰\}$