14,5

سلمان نجفی

① چون تابع f یک اکیداً صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ است پس داریم:

۲

$f(3-x)-f(x+1)\geq 0 \Rightarrow f(3-x)\geq f(x+1) \Rightarrow 3-x\geq x+1 \rightarrow 2\geq 2x \rightarrow x\leq 1$

$\Rightarrow \boxed{D_{gf}=(-\infty,1]}$

---

② ۲

تابع f یک تابع اکیداً صعودی است پس داریم:

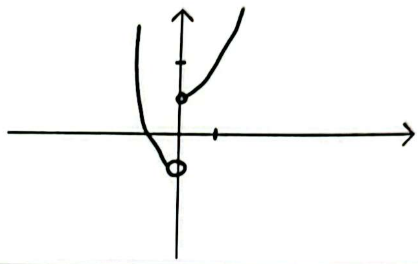
$f\circ f(x)<f(x^3) \Rightarrow f(x)<x^3 \Rightarrow (x^3+x)^3<x^3 \rightarrow x^3+x<x$

$\Rightarrow x^3<0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow \boxed{x\in(-\infty,0)}$

---

③ ۲

$$y=\begin{cases} x(x^2+\frac{1}{x}) \Rightarrow x^3+1 \;;\; x>0 \\ -x(x^2+\frac{1}{x}) \Rightarrow -x^3-1 \;;\; x<0 \end{cases} \Rightarrow$$



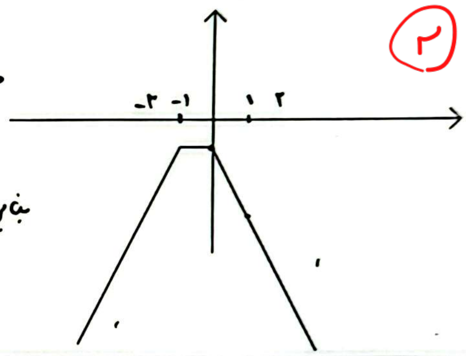
مطابق نمودار، تابع غیر یکنوا است

---

④ ابتدا عبارت f(x) را در بازه‌های مختلف خط‌بندی می‌کنیم

۲

$$y=|x|-|x+1|=\begin{cases} -1 \;;\; x\geq 0 \\ -2x-1 \;;\; 0\geq x\geq -1 \\ 1 \;;\; -1\geq x \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -2x-1 \;;\; x\geq 0 \\ -1 \;;\; -1\leq x\leq 0 \\ 2x+1 \;;\; x\leq -1 \end{cases} \Rightarrow$$



بنابراین در بازه $(-\infty,0]$ صعودی است پس بیشترین مقدار a برابر صفر است.

$\boxed{a_{Max}=0}$

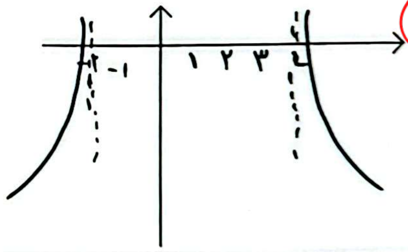
---

⑤ ۲

$y=\log_{\frac{1}{2}}^{x^2-2x-8}=\log_{\frac{1}{2}}^{(x-4)(x+2)}$

	-2		4	
+	0	−	0	+

$\Rightarrow D_f=(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$



$\Leftarrow$ بنابراین این تابع در بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً صعودی است

---

⑥ 1,5

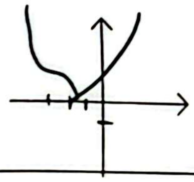
الف) $a^2-3>1 \rightarrow a^2>4 \Rightarrow \begin{cases} a>2 \\ a<-2 \end{cases}$

ب) $a^2-3\geq 1 \rightarrow a^2\geq 4 \rightarrow \begin{cases} a\geq 2 \\ a\leq -2 \end{cases} \cup \{\pm\sqrt{3}\}$

$a^2-3=0 \rightarrow a=\pm\sqrt{3}$

(۷) ۲

$f(x) = (x+3)^3 - 1 = x^3 + 9x^2 + 27x + 26 \Rightarrow a = 3 , b = 9 , c = 26$



$= |f(x)| \Rightarrow (x+3)^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x+3)^3 = 1 \Rightarrow x+3 = 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \boxed{K_{min} = -2}$

---

(۸) تابع f اکیداً صعودی با دامنه $[0,+\infty)$ است درنتیجه داریم:

۲

$\underbrace{fof(x) \leq f(\sqrt{x})}_{\sqrt{x} \geq 0 \rightarrow x \geq 0} \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 2 \leq \sqrt{x} \Rightarrow x \leq 2$

$D_{fof} = \{x \mid x \in D_f , f(x) \in D_f\}$

$\Rightarrow x \in [0,+\infty) , x + \sqrt{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} \geq 9/4$

$\Rightarrow (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 \geq \frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1/2 \geq 3/2 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{x} + \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x} \leq -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x \in [1,2]}$

---

(۹) برای بدست آوردن برد تابع اکیداً صعودی لازم است تا سرتاسر دامنه را به آن بدهیم:

۲

$\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} = t \qquad 2^t - 2^{-t} = \underbrace{2^t - \frac{1}{2^t}}_{\text{تابع اکیداً صعودی}}$

$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \leq 2 \Rightarrow t \in [-1,2]$

$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} , t = 2 \Rightarrow 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow R_f = [-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}] \Rightarrow \frac{15}{4} + \frac{6}{4} = \boxed{\frac{21}{4}}$

---

(۱۰) ۲

$R_{gof} = \{(x,y) \mid x \in R_f \cap D_g\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$

$f(x) = x - [x+1] = x - [x] - 2 \Rightarrow R_f : 0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -2 \leq x - [x] - 2 < -1 \Rightarrow R_f = [-2,-1)$

$g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = \frac{2^x}{2} - \frac{1}{2^x \times 2}$ (تابع اکیداً صعودی) $\Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - 2 = \frac{-15}{8}$

$x = -1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{4} - 1 = -3/4$

$\Rightarrow R_{gof} = [-\frac{15}{8}, -\frac{3}{4})$