

Subject:

Year: Month: Day: () وزیرادعاجن بابائی - دوازدهم پسرB - تکلیف 1 page: ()

$$\text{الف) } y^3 - 2x^2 = 2x - 1 \Rightarrow y^3 = 2x^2 + 2x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } (x, y_1) \in f \\ \text{if } (x, y_2) \in f \end{array} \right\} \rightarrow y_1 = y_2$$

به کمک تعریف ریاضی تابع است.

$$\rightarrow \begin{cases} y_1^3 = 2x^2 + 2x - 1 \\ y_2^3 = 2x^2 + 2x - 1 \end{cases} \rightarrow y_1^3 = y_2^3 \rightarrow y_1 = y_2 \checkmark$$

10

$$\text{ب) } x \odot y = y \odot x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} \odot y = y \odot \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \odot y = y \odot 0 = 0 \Rightarrow \odot y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{3\pi}{4} \\ \vdots \end{cases} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1}$$

15

به کمک مثال نقض نشان داریم این عبارت تابع نیست و به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ y می تواند $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$ باشد.

$$\text{ج) } \frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \quad x, y > 0 \Rightarrow x+y = 2\sqrt{xy} \Rightarrow x+y-2\sqrt{xy} = 0$$

20

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow \boxed{x = y} \checkmark$$

در نتیجه این رابطه تابع می باشد.

$$\Rightarrow xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0 \Rightarrow y^2(x-y) + 2(x-y) = 0$$

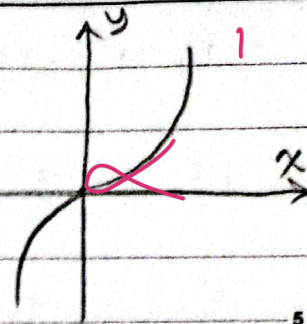
25

$$\Rightarrow (x-y)(y^2+2) = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow \boxed{x = y} \checkmark$$

عبارت y^2+2 هیچگاه صفر نمی شود در نتیجه $x-y$ باید صفر شود پس $x=y$ است و این رابطه تابع می باشد.

30

$$\text{الف) } |y| + x^2 = 2y \Rightarrow x^2 = 2y - |y|$$



$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 0 ; x^2 = 2y - y \Rightarrow x^2 = y \checkmark \\ y \leq 0 ; x^2 = 2y + y \Rightarrow x^2 = 3y \Rightarrow x^2_{\frac{3}{1}} = y \text{ غلط} \end{cases}$$

در نتیجه بر اساس ضرورت؛ این عبارت تابع می باشد.

$$\text{ب) } [y] + [x] = 1$$

(1, 5)

2

$$\underline{x=0} \rightarrow [y] = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ یا } 1, 1 \text{ یا } 1, 2 \text{ یا } \dots$$

از مثال نقض کمک می گیریم. اگر $x=0$ باشد در نتیجه $[y] = 1$ است پس y می تواند هر عددی در بازه $[1, 2)$ باشد و این عبارت تابع نیست. $\checkmark$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & |x-1| \geq 2 \\ a + 2x & 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & x \geq 3 \\ a + 2x & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x^2 - b & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(3) = 18 - b = a + 6$$

(2)

3

$$\rightarrow 12 - b = a \rightarrow 12 = b + a \checkmark$$

حاصل $a+b$ برابر 12 است.

$$f(x) = \sqrt{a - bx - x^2} \quad D_f = [b, a]$$

$$a - bx - x^2 = 0 \rightarrow -(x-b)(x-a) = 0 \quad \text{ریشه های این عبارت } a, b \text{ است.}$$

$$S = \text{مجموع ریشه ها} = a + b = -b \Rightarrow a = -2b \quad P = \text{ضرب ریشه ها} = ab = -a$$

$$\rightarrow \cancel{a+b} = b = -1 ; a = 2 \Rightarrow a+b = -b = 1 \checkmark$$

(2)

4

با توجه به اینکه دامنه تابع $y = \frac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ بازه $(-\infty, 2)$ است پس عبارت

ax^2+bx+c می تواند دایره درجه دوم باشد و باید $a=0$ باشد.

چون برای $x < 2$ مثبت است در نتیجه $b < 0$ است.

$$2b+c=0 \Rightarrow c=-2b$$

$$\Rightarrow 3a+c-3|b|=0 \Rightarrow -2b-3(-b)=b$$

چون دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{3x+2}{x+b}+a}$ برابر بازه $(2, +\infty)$ است در نتیجه $x=2$

نباید در دامنه باشد. صفر شدن عبارت زیر رادیکال ممکن ایجاد می کند پس تنها راه ایجاد کردن این صفر صفر شدن مخرج است.

$$\left. \begin{array}{l} x+b \neq 0 \rightarrow x \neq -b \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -b=2 \rightarrow b=-2$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$x^3-x \geq 0 \rightarrow x(x^2-1) \geq 0 \rightarrow x(x-1)(x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow D_f = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{|x|-1}}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد چون در مخرج است می تواند صفر شود پس این عبارت باید مثبت باشد.

$$|x|-1 > 0 \rightarrow |x| > 1 \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{الف) } y = \sqrt[3]{\frac{1}{|x| - [x]}}$$

مخرج نباید صفر شود.

برای اینکه $|x|$ با $[x]$ برابر نشود

$$|x| - [x] \neq 0 \Rightarrow |x| \neq [x]$$

x نباید جزو اعداد حسابی باشد ($x \notin \mathbb{W}$)

زیرا زمانی $|x|$ با $[x]$ برابر می شود که x صفر یا عدد صحیح مثبت باشد
به عبارت دیگر زمانی x عدد حسابی باشد $[x]$ با $|x|$ برابر می شود.

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{W} \checkmark$$

(۱,۵)



10

$$\text{ب) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \Rightarrow \sqrt{y} = 9 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (9 - \sqrt{x})^2$$

$$\Rightarrow y = 81 + x - 18\sqrt{x} \Rightarrow y = 81 + x - 6\sqrt{x}$$

15

$$x \geq 0 \checkmark$$

عبارت زیر را در کمال باید نامنفی باشد.

$$\Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

20 عبارت زیر را در کمال باید نامنفی باشد

$$y = \sqrt{[2x - \frac{1}{4}] + [2x + \frac{3}{4}]}$$

و چون در مخرج است
بسیار بهتر است
بسیار مثبت باشد

$$[2x - \frac{1}{4}] + [2x + \frac{3}{4}] > 0$$

$$\rightarrow [2x - \frac{1}{4}] + [2x - \frac{1}{4} + 1] > 0 \Rightarrow [2x - \frac{1}{4}] + [2x - \frac{1}{4}] + 1 > 0$$

$$\Rightarrow 2[2x - \frac{1}{4}] > -1 \Rightarrow [2x - \frac{1}{4}] > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x - \frac{1}{4} \geq 0$$

(۲)

$$\Rightarrow 2x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq \frac{1}{8} \Rightarrow D_f = [\frac{1}{8}, +\infty) \checkmark$$

30

$$y = \sqrt{1 - \log(2x - a)} \quad D_f = (b, c]$$

عبارت درون کسری باید مثبت باشد.

$$5 \quad 2x - a > 0 \Rightarrow 2x > a \Rightarrow x > \frac{a}{2} \quad (1)$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$1 - \log(2x - a) \geq 0 \rightarrow 1 \geq \log(2x - a) \Rightarrow 10 \geq 2x - a$$

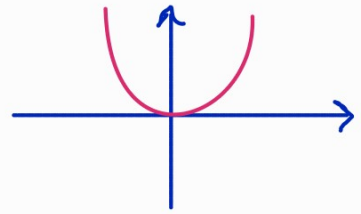
$$10 \Rightarrow 10 + a \geq 2x \Rightarrow \frac{10+a}{2} \geq x \quad (2)$$

$$D_f = (1) \cap (2) = \frac{a}{2} < x \leq \frac{10+a}{2} \Rightarrow D_f = \left(\frac{a}{2}, \frac{10+a}{2}\right] = (b, c]$$

$$15 \Rightarrow b = \frac{a}{2}, \quad c = \frac{10+a}{2} \Rightarrow \underbrace{c - b = 5}_{\text{✓}}$$

۲- طرف چپ تساوی همواره مثبت است پس طرف راست هم باید مثبت باشد: $y > 0$

الف) $|y| + x^2 = 2y \xrightarrow{y > 0} y = x^2$



تابع
مربع

-۸

ب) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{y} = 9 - \sqrt{x} \end{cases} \xrightarrow{y > 0} 0 \leq x \leq 81$

$\cap \rightarrow [0, 81]$