

الف) $y^3 - 2x^2 = 2x - 1 \Rightarrow y^3 = 2x^2 + 2x - 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } (x, y_1) \in f \\ \text{if } (x, y_2) \in f \end{array} \right\} \rightarrow y_1 = y_2$$

به کمک تعریف ریاضی تابع است.

$$\rightarrow \begin{cases} y_1^3 = 2x^2 + 2x - 1 \\ y_2^3 = 2x^2 + 2x - 1 \end{cases} \rightarrow y_1^3 = y_2^3 \rightarrow y_1 = y_2$$

ب) $x \odot y = y \odot x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} \odot y = y \odot \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \odot y = y \odot 0 = 0 \Rightarrow y \odot 0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{3\pi}{4} \\ \vdots \end{cases}$$

به کمک مثال نقض نشان داریم این عبارت تابع نیست و به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ y می تواند $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$ باشد.

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \quad x, y > 0 \Rightarrow x+y = 2\sqrt{xy} \Rightarrow x+y-2\sqrt{xy} = 0$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow \boxed{x = y}$$

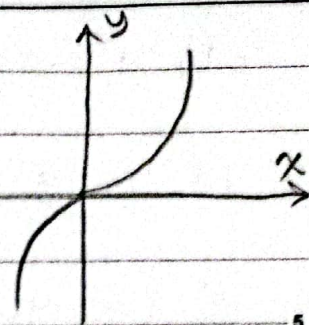
در نتیجه این رابطه تابع می باشد

$$\Rightarrow xy^2 + 2x - y^3 - 2y = 0 \Rightarrow y^2(x-y) + 2(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(y^2+2) = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow \boxed{x = y}$$

عبارت y^2+2 هیچگاه صفر نمی شود در نتیجه $x-y$ باید صفر شود پس $x=y$ است و این رابطه تابع می باشد.

$$\text{الف) } |y| + x^2 = 2y \Rightarrow x^2 = 2y - |y|$$



$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 0; & x^2 = 2y - y \Rightarrow x^2 = y \\ y \leq 0; & x^2 = 2y + y \Rightarrow x^2 = 3y \Rightarrow x^2_{\frac{1}{3}} = y \end{cases}$$

در نتیجه بر اساس ضرورت؛ این عبارت تابع می باشد.

$$\text{ب) } [y] + [x] = 1$$

$$\underline{x=0} \rightarrow [y] = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ یا } 1, 1, 1, 2, \dots$$

از مثال نقض کمک می گیریم. اگر $x=0$ باشد در نتیجه $[y]=1$ است پس y می تواند هر عددی در بازه $(1, 2)$ باشد و این عبارت تابع نیست.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & |x-1| \geq 2 \\ a + 2x & 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - b & x \geq 3 \\ a + 2x & 0 \leq x \leq 3 \\ 2x^2 - b & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(3) = 18 - b = a + 6$$

$$\rightarrow 12 - b = a \rightarrow \boxed{12 = b + a}$$

حاصل $a+b$ برابر ۱۲ است.

$$f(x) = \sqrt{a - bx - x^2} \quad D_f = [b, a]$$

$$a - bx - x^2 = 0 \rightarrow -(x-b)(x-a) = 0 \quad \text{ریشه های این عبارت } a, b \text{ است.}$$

$$S = \text{مجموع ریشه ها} = a + b = -b \Rightarrow a = -2b \quad P = \text{ضرب ریشه ها} = ab = -a$$

$$\rightarrow \boxed{b = -1; a = 2 \Rightarrow a + b = -b = 1}$$

باتوجه به اینکه دامنه تابع $y = \frac{2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ بازه $(-\infty, 2)$ است پس عبارت

ax^2+bx+c می تواند دایره درجه دوم باشد و باید $a=0$ باشد.

چون برای $x < 2$ مثبت است $ax^2+bx+c > 0 \xrightarrow{a=0} bx+c > 0$

است در نتیجه $b < 0$ است.

$$2b+c=0 \Rightarrow c=-2b$$

$$\Rightarrow 3a+c-3|b|=0 \Rightarrow -2b-3(-b)=b$$

۵

چون دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{3x+2}{x+b} + a}$ برابر بازه $(2, +\infty)$ است در نتیجه $x=2$

نباید در دامنه باشد. صفر شدن عبارت زیر رادیکال ممکن ایجاد می کند پس تنها راه ایجاد کردن این صفر، صفر شدن مخرج است.

$$\left. \begin{array}{l} x+b \neq 0 \rightarrow x \neq -b \\ x \neq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -b=2 \rightarrow b=-2$$

۶

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$y = \sqrt{x^3-x}$$

$$x^3-x \geq 0 \rightarrow x(x^2-1) \geq 0 \rightarrow x(x-1)(x+1) \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 1 \\ \hline & - & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow D_f = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

۷

$$y = \frac{1}{\sqrt{|x|-1}}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد و چون در مخرج است نمی تواند صفر شود پس این عبارت باید مثبت باشد.

$$|x|-1 > 0 \rightarrow |x| > 1 \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{الف) } y = \sqrt[3]{\frac{1}{|x| - [x]}}$$

مخرج نباید صفر شود.

برای اینکه $|x|$ با $[x]$ برابر نشود

$$|x| - [x] \neq 0 \Rightarrow |x| \neq [x]$$

x نباید جزو اعداد حسابی باشد ($x \notin \mathbb{W}$)

زیرا زمانی $|x|$ با $[x]$ برابر می شود که x صفر یا عدد صحیح مثبت باشد.
به عبارت دیگر زمانی x عدد حسابی باشد $[x]$ با $|x|$ برابر می شود.

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{W}$$

$$\text{ب) } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \Rightarrow \sqrt{y} = 9 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (9 - \sqrt{x})^2$$

$$\Rightarrow y = 81 + x - 18\sqrt{x} \Rightarrow y = 81 + x - 6\sqrt{x}$$

عبارت زیر را در کمال باید نامنفی باشد.

$$x \geq 0$$

$$\Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

20 عبارت زیر را در کمال باید نامنفی باشد
و چون در مخرج است
بسیار دقت کنید و پس این عبارت
باید مثبت باشد.

$$y = \sqrt{[2x - \frac{1}{4}] + [2x + \frac{3}{4}]}$$

$$[2x - \frac{1}{4}] + [2x + \frac{3}{4}] > 0$$

$$\rightarrow [2x - \frac{1}{4}] + [2x - \frac{1}{4} + 1] > 0 \Rightarrow [2x - \frac{1}{4}] + [2x - \frac{1}{4}] + 1 > 0$$

$$\Rightarrow 2[2x - \frac{1}{4}] > -1 \Rightarrow [2x - \frac{1}{4}] > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq \frac{1}{8} \Rightarrow D_f = [\frac{1}{8}, +\infty)$$

$$y = \sqrt{1 - \log(2x - a)} \quad D_f = (b, c]$$

عبارت درون کسری باید مثبت باشد.

$$5 \quad 2x - a > 0 \Rightarrow 2x > a \Rightarrow x > \frac{a}{2} \quad (1)$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$1 - \log(2x - a) \geq 0 \rightarrow 1 \geq \log(2x - a) \Rightarrow 10 \geq 2x - a$$

10

$$\Rightarrow 10 + a \geq 2x \Rightarrow \frac{10 + a}{2} \geq x \quad (2)$$

$$D_f = (1) \cap (2) = \frac{a}{2} < x \leq \frac{10 + a}{2} \Rightarrow D_f = \left(\frac{a}{2}, \frac{10 + a}{2} \right] = (b, c]$$

$$15 \Rightarrow b = \frac{a}{2}, \quad c = \frac{10 + a}{2} \Rightarrow \underbrace{c - b = 10}$$