

به نام خداوند بخشنده مهربان

20

و خدا حاجی بابائی - دوازدهم پسر B - تکلیف شماره ۳

25

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; [x] > \varepsilon \\ \varepsilon x + 3 & ; [x] \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$y = \sqrt{f(x) - x + 1}$$

$$f(x) - x + 1 \geq 0$$

$$\varepsilon x + 3 - x + 1 \geq 0 \rightarrow 3x + \varepsilon \geq 0$$

$$: x < \Delta \leftarrow [x] \leq \varepsilon$$

30

$$\rightarrow x \geq \frac{-\varepsilon}{3} \rightarrow -\frac{\varepsilon}{3} \leq x < \Delta \quad (I)$$

P4YCO

$$2x-1-x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$

$$: 0 \leq x \leftarrow x \in [x] \cap \mathbb{R}$$

$$\rightarrow x \geq 0 \quad (I2)$$

1

$$D = (I) \cup (II) = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

sol

$$y = \frac{2\varepsilon x^3 + 3\gamma x^2 + 1\alpha x + 1}{(\varepsilon x^2 + \varepsilon x + 1)^2}$$

2

$$2\varepsilon x^3 + 3\gamma x^2 + 1\alpha x + 1 = 3(\alpha x^3 + 1\gamma x^2 + \gamma x + 1) = 3(2x+1)^3$$

$$(\varepsilon x^2 + \varepsilon x + 1)^2 = ((2x+1)^2)^2 = (2x+1)^4$$

$$\Rightarrow y = \frac{3(2x+1)^3}{(2x+1)^4} = \frac{3}{2x+1} \rightarrow 2x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} & ; x \neq \pm 1 \\ \frac{ax + 2}{x + b} & ; x = \pm 1 \end{cases}$$

$$g(x) = x + c$$

5

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x + 2)$$

(μ)

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{x^2 - 1} ; (x \neq \pm 1)$$

10 → $f(0) = 2 \rightarrow g(0) = c = 2 \rightarrow \boxed{c = 2}$ چون دو تابع f و g برابر شدند:

$$g(1) = 1 + 2 = 3 = f(1) \rightarrow \frac{a + 2}{1 + b} = 3 \Rightarrow a + 2 = 3 + 3b$$

$$g(-1) = -1 + 2 = 1 = f(-1) \rightarrow \frac{2 - a}{b - 1} = 1 \Rightarrow b - 1 = 2 - a$$

15

$$\begin{cases} 3b - a = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 4b = 2 \\ a = 3 - b \end{cases} \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}} \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

20 → $b + c = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} = 2.5$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-c} \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+ax+b} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2+ax+b}$$

$$\frac{x+1}{x-c} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2+ax+b} \quad \text{چون دو تابع } f \text{ و } g \text{ با هم برابرند داریم:}$$

$$\rightarrow (x-1)(x-c) = x^2+ax+b \rightarrow x^2-(c+1)x+c = x^2+ax+b$$

$$\rightarrow a = -c-1, \quad b = c$$

در $g(x)$ عامل $(x-1)$ در صورت و مخارج حذف می شود و پس $x=1$ همچنان در دامنه و نیست. برای اینکه دو تابع برابر باشند دامنه هایشان نیز باید یکسان باشد بنابراین:

$$x-1 = x-c \rightarrow \boxed{c=1}$$

$$\rightarrow a = -2, \quad b = c = 1 \rightarrow a+b+c = -2+1+1 = 0$$

PAYCO

$$f(x) = (x-1)^r (x-1)$$

$$g(x) = f(x+1) + f(1-x)$$

$$f(x+1) = ((x+1)-1)^r ((x+1)-1) = (x-1)^r x$$

5

$$f(1-x) = ((1-x)-1)^r ((1-x)-1) = (-x-1)^r (-x) = -x(x+1)^r$$

$$g(x) = f(x+1) + f(1-x) = x[(x-1)^r - (x+1)^r] = x[(x-1) - (x+1)][(x-1) + (x+1)]$$

$$30 \rightarrow g(x) = x(-2)(2x) \rightarrow g(x) = -4x^2$$

$$f(1-2x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2 & x \leq 0 \\ \varepsilon \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$$

نتیجه من لیم $f(-1)$ به ازای $x=1$ و $f(3)$ به ازای $x=-1$ به دست می آید

$$1-2x = -1 \rightarrow -2x = -2 \rightarrow x = 1$$

$$1-2x = 3 \rightarrow -2x = 2 \rightarrow x = -1$$

4

$$f(-1) = \varepsilon \sqrt{1} = \varepsilon \quad f(3) = \sqrt[3]{-1} + 2 = 1$$

$$f(-1) + f(3) = \varepsilon + 1 = \Delta$$

$$f(x + \sqrt{x}) = x^\varepsilon + 3x$$

$$x + \sqrt{x} = 4 \quad \sqrt{x} = t \rightarrow t^2 + t - 4 = 0 \rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

✓

$$\rightarrow \begin{cases} t = -3 \rightarrow \sqrt{x} = -3 \text{ ❌} \\ t = 2 \rightarrow \sqrt{x} = 2 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

در نتیجه $f(4)$ به ازای $x=4$ به دست می آید

$$f(4) = (\varepsilon)^\varepsilon + 3(\varepsilon) = 2\Delta 4 + 12 = 24\Delta \rightarrow f(4) = 24\Delta$$

$$f(x) = x^3 + x$$

$$f(x-1) = (x-1)^3 + (x-1)$$

^

$$f(1-x) = (1-x)^3 + (1-x)$$

$$\rightarrow f(x-1) + f(1-x) = (x-1)^3 + (1-x)^3 + \cancel{x-1} + \cancel{1-x}$$

$$\rightarrow f(x-1) + f(1-x) = (x-1)^3 - (x-1)^3 = 0$$

$$f(x) = \sqrt{\varepsilon x - 3a} + K - 1$$

$$g(x) = \sqrt{b - \varepsilon x} + 3K$$

$$2f - g = \{(1, K)\}$$

یعنی دامنه تابع $f - g$ فقط شامل $x=1$ است و مقدار آن در 1 برابر K است.

5

$$\varepsilon x - 3a \geq 0 \rightarrow \varepsilon x \geq 3a \rightarrow x \geq \frac{3a}{\varepsilon}$$

دامنه f :

$$b - \varepsilon x \geq 0 \rightarrow b \geq \varepsilon x \rightarrow \frac{b}{\varepsilon} \geq x$$

دامنه g :

10

برای اینکه اشتراک دو دامنه فقط 1 باشد باید:

$$\frac{3a}{\varepsilon} = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{\varepsilon}{3}}$$

9

$$\frac{b}{\varepsilon} = 1 \rightarrow \boxed{b = \varepsilon}$$

15

$$\rightarrow f(x) = \sqrt{\varepsilon x - \varepsilon} + K - 1, \quad g(x) = \sqrt{\varepsilon - \varepsilon x} + 3K$$

$$(2f - g)(1) = 2(K - 1) - 3K \Rightarrow 2K - 2 - 3K = -K - 2$$

و طبق فرض سوال $(2f - g)(1) = K$ پس داریم:

20

$$-K - 2 = K \rightarrow -2 = 2K \rightarrow \boxed{K = -1}$$

$$3a - \frac{b}{\varepsilon} - K = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon} - (-1) = \varepsilon - 1 + 1 = \varepsilon$$

25

$$f(x) = \sqrt{m - x} + n$$

$$g(x) = \sqrt{2x + 2}$$

$$D_{f \times g} = [-1, 7]$$

$$m - x \geq 0 \rightarrow m \geq x \quad \text{دامنه } f \quad 2x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \quad \text{دامنه } g$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [-1, 7] = [-1, m] \rightarrow \boxed{m = 7}$$

10

30

$$(f - g)(3) = \sqrt{7 - 3} + n - \sqrt{2(3) + 2} = 2 + n - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \rightarrow n = 2\sqrt{2} - 2$$

PAYCO

$$\rightarrow m + n = 2\sqrt{2} + 5$$