

الف) $f(x) = 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

مطابق: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \rightarrow 0 \leq \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

$0 \leq 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \rightarrow -1 \leq 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 1$

$\rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1 \rightarrow R_f = [-1, 1]$ بردار

1

ب) $g(x) = 3 \cos^3 x - 4$

مطابق: $-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow -1 \leq \cos^3 x \leq 1 \rightarrow -3 \leq 3 \cos^3 x \leq 3$

$-7 \leq 3 \cos^3 x - 4 \leq -1 \rightarrow -7 \leq g(x) \leq -1 \rightarrow R_g = [-7, -1]$ بردار

15 $-3 \leq x < -2$

$-2 \leq x < -1$

$-1 \leq x < 0$

$|x| = -x$

$|x| = -x$

$|x| = -x$

$[x] = -3$

$[x] = -2$

$[x] = -1$

$y = -1 - 3 = -4$

$y = -1 - 2 = -3$

$y = -1 - 1 = -2$

20 $0 < x < 1$ ($x \neq 0$)

$1 \leq x < 2$

$2 \leq x < 3$

$x = 3$

$|x| = x$

$|x| = x$

$|x| = x$

$y = 1 + 3 = 4$

$[x] = 0$

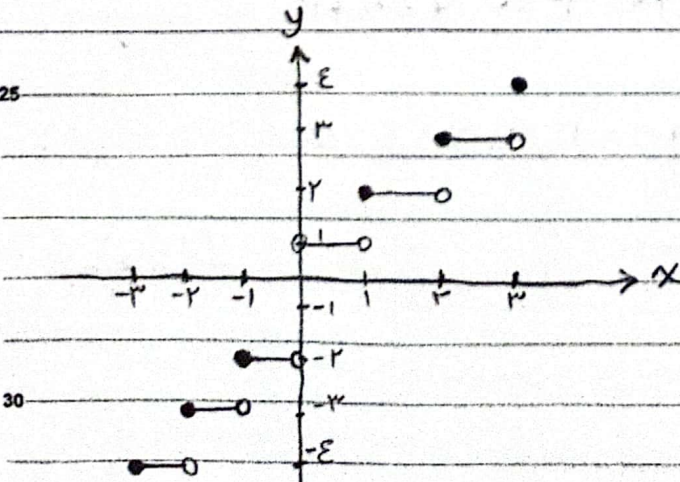
$[x] = 1$

$[x] = 2$

$y = 1 + 0 = 1$

$y = 1 + 1 = 2$

$y = 1 + 2 = 3$



$y = \frac{x}{|x|} + [x] \quad x \in [-3, 3]$

2

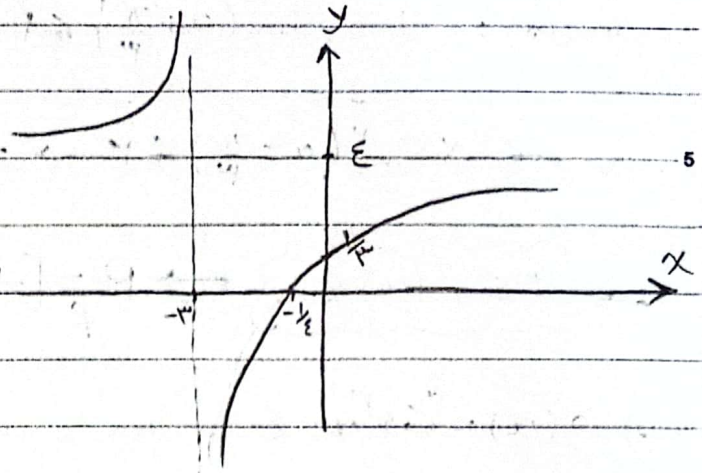
$$y = \left| \frac{\varepsilon x + 1}{x + 3} \right|$$

ابتدا افراط $y = \frac{\varepsilon x + 1}{x + 3}$ را رسم می کنیم سپس قدر مطلق را
روی آن اعمال می کنیم.

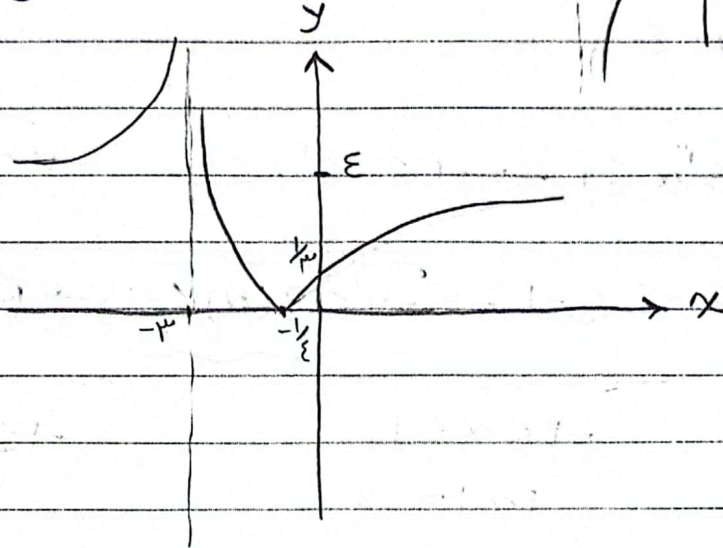
$$\rightarrow y = \frac{\varepsilon x + 1}{x + 3}$$

$$-3 = \text{ریزه مخرج} = \text{مجاذب قائم}$$

$$\text{مجاذب افقی} = \frac{a}{c} = \varepsilon$$



$$\rightarrow y = \left| \frac{\varepsilon x + 1}{x + 3} \right|$$



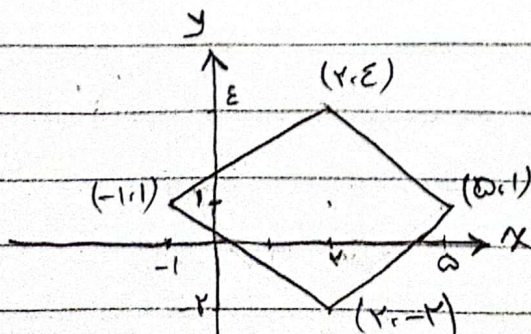
$$|x - 2| + |y - 1| = 3$$

$$\text{حالت اول: } x \geq 2, y \geq 1 \rightarrow (x - 2) + (y - 1) = 3 \rightarrow y = 4 - x$$

$$\text{حالت دوم: } x \geq 2, y < 1 \rightarrow (x - 2) - (y - 1) = 3 \rightarrow y = x - 4$$

$$\text{حالت سوم: } x < 2, y \geq 1 \rightarrow -(x - 2) + (y - 1) = 3 \rightarrow y = x + 4$$

$$\text{حالت چهارم: } x < 2, y < 1 \rightarrow -(x - 2) - (y - 1) = 3 \rightarrow y = 4 - x$$



الف) $f(x) = x + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x + \frac{1}{x}}$ ابتدا $t = x + \frac{1}{x}$ فرض کرده و برای اینکه
 رادیکال تعریف شود، باید $t \geq 0$ باشد
 و من داریم:

5 $x + \frac{1}{x} \geq -2 \quad (x < 0) \quad \times$
 $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0) \quad \checkmark$ با توجه به $t \geq 0$ در نتیجه $t \in [2, \infty)$ خواهد بود.

کمترین مقدار در این عبارت به ازای $t = 2$ بدست می آید.
 $f = t + 2\sqrt{t}$

بر دام تابع $f_{\min} = 2 + 2\sqrt{2} \rightarrow R_f = [2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$

(5)

10 ب) $y = (3 - \sin x)(1 + \sin x) = 3 + 2\sin x - \sin^2 x = 4 - (\sin x - 1)^2$

بیشترین مقدار این عبارت زمانی بدست می آید که مربع کامل برابر صفر شود و
 بیشترین مقدار این عبارت برابر 4 است.

15 کمترین مقدار این عبارت زمانی بدست می آید که مربع کامل بیشترین مقدار را داشته
 باشد که به ازای $\sin x = -1$ مربع کامل برابر 4 شده و عبارت صفری شود.

بر دام تابع $0 \leq 4 - (\sin x - 1)^2 \leq 4 \rightarrow R = [0, 4]$

20 $f(x) = -\frac{1}{3}x + 10 \quad D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$f(1) = -\frac{1}{3} + 10 = \frac{29}{3} \quad f(2) = -\frac{2}{3} + 10 = \frac{28}{3} \quad f(3) = -1 + 10 = 9$

$f(4) = -\frac{4}{3} + 10 = \frac{26}{3} \quad f(5) = -\frac{5}{3} + 10 = \frac{25}{3} \quad f(6) = -2 + 10 = 8$

25 $f(7) = -\frac{7}{3} + 10 = \frac{23}{3} \quad f(8) = -\frac{8}{3} + 10 = \frac{22}{3} \quad f(9) = -3 + 10 = 7$

$R_f = \left\{ \frac{29}{3}, \frac{28}{3}, 9, \frac{26}{3}, \frac{25}{3}, 8, \frac{23}{3}, \frac{22}{3}, 7 \right\}$

(6)

30 مجموع تمام اعضای $R_f = \frac{1}{3}(29 + 28 + 27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21) = \frac{225}{3} = 75$

چون تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ فقط در بازه $[2, +\infty)$ تعریف می شود در نتیجه این تابع، یک تابع خطی با شیب مثبت است پس داریم:

$$[a=0, b) \rightarrow f(x) = \sqrt{bx+c}$$

پس عبارت زیر را می توانیم از $x=2$ شروع نامنقش کردن کند:

$$2b+c=0 \rightarrow c=-2b$$

$$\Rightarrow f(3) = \sqrt{3b+c} = 1 \rightarrow 3b+c=1 \rightarrow 3b-2b=1 \rightarrow \boxed{b=1} \rightarrow \boxed{c=-2}$$

$$g(x) = \sqrt{bx^2+ax-2c} \Rightarrow g(x) = \sqrt{x^2+4}$$

چون کمترین مقدار x^2 برابر صفر است در نتیجه کمترین مقدار $g(x)$ به ازای $x=0$ به دست می آید.

$$g(0) = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$$



$$\rightarrow R = [2, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x+2} = \frac{x(x^2-4)}{x+2} = \frac{x(x+2)(x-2)}{x+2} \xrightarrow{x \neq -2} x^2-2x = (x-1)^2-1$$

چون $x=-2$ حذف کرده مقدار متناظر آن نیز از مبرد حذف می شود $f(-2)=1$

$$\text{مرد تابع} = [-1, +\infty) - \{1\} \rightarrow \boxed{c=-1}$$



از طرفین هم $x=-2$ ریشه مخرج است و در دامنه قرار نمی گیرد.

$$D_f = IR - \{-2\}$$

$$\rightarrow \boxed{a=b=-2}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2c}\right) = f\left(\frac{-2}{-2}\right) = f(1) = \frac{1-1}{2} = 0 \rightarrow \boxed{f(2)=0}$$

باتوجه به اینکه تابع $y = \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + bx - 1}$ خطی است پس عبارت زیر را در یکال باید مکعب باشد تا اثر رادیکال فزاید از بین برود.

باتوجه به اتحاد مکعب دو جمله‌ای: $(\Delta + \square)^3 = \Delta^3 + 3\Delta\square(\Delta + \square) + \square^3$

باتوجه به -1 و مقایسه خواهیم داشت: $(x-2)^3 = x^3 + ax^2 + bx - 1$

$\rightarrow x^3 - 4x(x-2) - 1 = x^3 - 4x^2 + 12x - 1 \rightarrow \boxed{a = -4}, \boxed{b = 12}$

$\rightarrow y = \sqrt[3]{(x-2)^3} \Rightarrow y = x-2, D_f = [a, b] = [-4, 12]$

$\rightarrow -4 \leq x \leq 12 \rightarrow -1 \leq x-2 \leq 10 \rightarrow -1 \leq y \leq 10 \rightarrow R = [-1, 10]$ برد تابع

$y = [x] + [x + \frac{1}{p}] \quad x \in [\frac{1}{p}, 2)$

$[x] + [x + \frac{1}{p}] = [2x] \rightarrow y = [2x]$

$\frac{1}{p} \leq x < 1 \rightarrow 1 \leq 2x < 2$

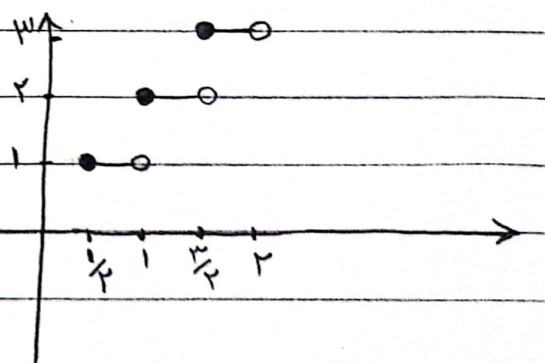
$[2x] = 1$

$1 \leq x < \frac{3}{p} \rightarrow 2 \leq 2x < 3$

$[2x] = 2$

$\frac{3}{p} \leq x < 2 \rightarrow 3 \leq 2x < 4$

$[2x] = 3$



مضمار این تابع در بازه $[\frac{1}{p}, 2)$ از ۳ پاره خط تشکیل شده.