به نام خدا

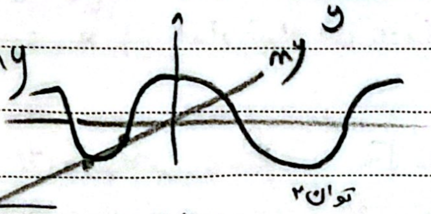
کیوان مکارم شب — تکلیف شماره 1 — 19

(1) ۲

الف) $y^3 = 2x^2+2x-1 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} y = \sqrt[3]{2x^2+2x-1}$ ← تابع است ✓

ب) $x\cos y = y\cos x \to \frac{\cos y}{y} = \frac{\cos x}{x} \to 0 < \frac{\cos x}{x} < \infty$ ، $\frac{\cos x}{x} = m$

$\to \cos y = my$



چند نقطه برخورد دارند ← تابع نیست ✓ ✗

ج) $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$ ، $x,y>0 \xleftrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x^2+y^2+2xy}{4} = xy \iff x^2+y^2+2xy = 4xy$

$\iff x^2+y^2-2xy=0 \iff (x-y)^2=0 \iff x=y$ تابع است ✓ ✓

د) $xy^2+2x-y^3-2y=0 \to y^2(x-y)+2(x-y)=0$

$\to (x-y)(\underbrace{y^2+2}_{\text{همواره مثبت}})=0 \to x-y=0 \to x=y$ ✓ تابع است ✓

(2) ۲

$|x-1|\geq 2 \to x-1\geq 2 \to x\geq 3$ یا $x-1\leq -2 \to x\leq -1$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases} 2x^2-b & x\geq 3 \text{ یا } x\leq -1 \\ a+2x & -3< x< -1 \end{cases}$ ← تابع باید به ازای $x=-1$ یا $x=-3$ ، یک جواب به ما بدهد.

$x=-1 \to 2-b = a-2 \to a+b=4$ ✓ ✓ و $x=-3 \to 18-b = a-6$

$\to a+b=24$ ✓

(3) ۲

$a, b \to$ ریشه های معادله ماست $\to x=a \to a-ba-a^2=0$

$\to a^2+ba-a=0 \to a(a+b-1)=0 \to a=0$ یا $a+b-1=0 \to \boxed{a+b=1}$ ✓

اگر $x=b \to a-b^2-b^2=0 \to 2b^2=a \to b=\sqrt{\frac{a}{2}} \to \frac{\sqrt{2}}{2}a+a=1 \to \frac{(2+\sqrt{2})a}{2}=1$

$\to$ a مجموع مثبت $\to$ b مجموع مثبت $\to$ پس $a+b=1$

۴) باید ضریب x^2 صفر شود تا بازه (۲ و $-\infty$) معنی پیدا کند. ۱,۷۵

$\frac{2}{\sqrt{-(x-2)}} \to -x+2 = bx + c \to b=-1 ,\ c=2 ,\ a=0$

$3a + c - 3|b| = 3(0)+2-3|-1| = 2-3 = -1$ ✓

پاسخ باید برحسب b ارائه شود ←

$a=0 \quad c=-2b \quad b<0 \to 0-2b-3(-b)=b$

---

۵) ۲

الف) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{|x|-[x]}} \to |x|-[x]\neq 0 \to |x|\neq [x]$

← x نباید عدد صحیح مثبت باشد، زیرا با هم هم‌علامت می‌شوند و ساده می‌شوند، پس x باید اعداد غیر از این بازه باشند. ←

$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ✓

$R-W$

ب) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \to \sqrt{y}=9-\sqrt{x} \xrightarrow{1} x\geq 0$

(۲) $9-\sqrt{x}\geq 0 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sqrt{x}\leq 9 \to x\leq 81 \xrightarrow{1,2} \boxed{0\leq x\leq 81}$ ✓

---

۶) ۱,۵

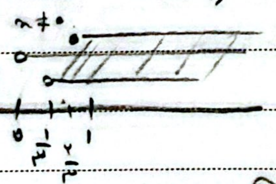
الف) $f(x)=\sqrt{\log_x^{3x-1}} \xrightarrow{1} 3x-1>0 \to x>\frac{1}{3} ,\ \xrightarrow{2} x>0 ,\ x\neq 1$

(۳) $\to \log_x^{3x-1}\geq 0 \to 3x-1\geq 1 \to x\geq \frac{2}{3} \xrightarrow{1,2,3} [\frac{2}{3} , +\infty)$ ✓

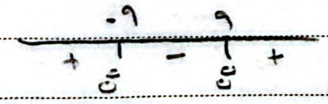
$0<3x-1\leq x^0$

$x<\frac{2}{3}$

$D_f = (\frac{1}{3} , \frac{2}{3}] \cup (1 , +\infty)$



ب) $f(x) = \log \frac{1}{4+\sqrt{|x|}-|x|} \xrightarrow{1} \frac{1}{4+\sqrt{|x|}-|x|} > 0 \to$



---

۷) ۲

$y=\sqrt{\frac{3x+2}{x+b}+a} \to \sqrt{\frac{3x+2+ax+ab}{x+b}} \to D_f=(2 , +\infty)$

$\to \sqrt{\frac{(3+a)x+2+ab}{x+b}} \geq 0 \xrightarrow[\text{را صفر می‌کنیم}]{\text{ضریب } x} b=-2 ,\ a=-3 \to \sqrt{\frac{2+6}{x-2}}$

$\to \boxed{b=-2}$ ✓

۸ ‏ ۱٫۷۵

$$f(x) = \begin{cases} ۲x-۱ & x>۵ \\ ۴x+۳ & x\le ۴ \end{cases}$$

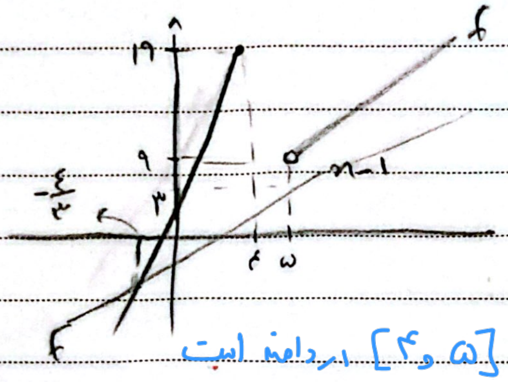
$f(x)-x+1 \geq 0 \rightarrow f(x) \geq x-1$

آیا $f(x) = x-1$ ؟

① $۲x-1 = x-1 \rightarrow x=۰$ ✗ در دامنه نیست

② $۴x+۳ = x-1$

$۳x = -۴ \rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$ ✓



$\rightarrow D_f = [-\frac{۴}{۳}, ۴] \cup (۵, +\infty)$

بازه‌ی $[۴, ۵]$ در دامنه است $\leftarrow$ $D_f = [-\frac{۴}{۳}, +\infty)$

---

۹ ‏ ۲

$$y = \frac{۳(۸x^۳+۱۲x^۲+۶x+۱)}{(۲x+۱)^۴} = \frac{۳(۲x+۱)^۳}{(۲x+۱)^۴} = \frac{۳}{(۲x+۱)} \rightarrow \neq ۰$$

$\rightarrow D_f = R - \{-\frac{۱}{۲}\}$ ✓

---

۱۰ ‏ ۲

$y = \sqrt{1-\log^{۲x-a}}$ $\rightarrow$ ① $۲x-a>۰ \rightarrow ۲x>a \rightarrow x > \frac{a}{۲}$

② $1-\log^{۲x-a} \geq ۰ \rightarrow \log_{۱۰}^{۲x-a} \leq 1 \rightarrow ۲x-a \leq ۱۰ \rightarrow x \leq \frac{۱۰+a}{۲}$

$\Rightarrow D_f = (\underbrace{\frac{a}{۲}}_{b}, \underbrace{\frac{۱۰+a}{۲}}_{c}] \rightarrow c-b = \frac{۱۰+a}{۲} - \frac{a}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$ ✓