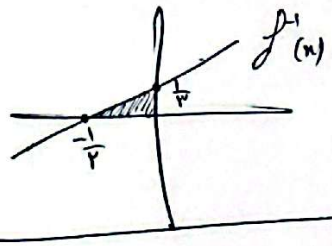
۱- $f(x): 2y = 3x-1 \to f^{-1}(x): 2x = 3y-1 \to 3y = 2x+1 \to y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ ۱۴,۵



$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ ۲

۲- الف) $x^2 - 2x + 3 \to \min \Big| -\frac{b}{2a} = 1$ ، $x \in [1, +\infty)$ $\to$ یک به یک است چون دامنه بعد از مینیمم است $\to f(x) = (x-1)^2 + 2 \to f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-2} + 1$ (ارزش تابع)

$R_f = D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$ $\xrightarrow{D_f = [1, +\infty)} R_{f^{-1}} = D_f \to f^{-1}(x) = +\sqrt{x-2} + 1$ ۲

ب) $x^2 - 2x + 3$ ، $x \in [3, +\infty)$ $\to$ یک به یک است $\to f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$R_f = [6, +\infty) \to D_{f^{-1}(x)} = [6, +\infty)$

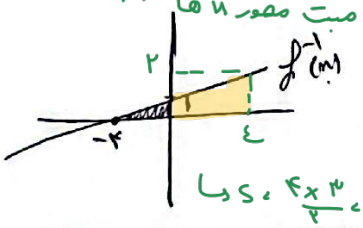
$\to f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1 \,,\, x \in [6, +\infty)$

۳- $f(x) = 2x - \sqrt{12 - 12x(1-x)} = 2x - \sqrt{4(x-2)^2} = 2x - 2\sqrt{(x-2)^2} = 2x - 2|x-2|$ ۱,۷۵

$4x^2 - 12x + 12 = 4(x-2)^2$

$\to f(x) = \begin{cases} 4 & x \geq 2 \\ 4x - 4 & x < 2 \end{cases}$

تابع در این بازه وارون پذیر است



$f(x) = 4x - 4 \to f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 1$

$S = \frac{4 \times 1}{2} = 2$

$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

۴- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5} \to \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_1^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_2^2 \to x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = \pm x_2$

x_1 و x_2 هم علامتند پس این جواب غلط است و $x_1 = x_2$ ، تابع یک به یک است

$f^{-1}(x): x = \frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \to x^2 = \frac{y^2 + 0}{y^2 - 5} \to y^2 = \frac{5x^2}{x^2-1} \to y = \pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \to$ dom هم علامت ۲

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$

۵- $g(x) \begin{cases} x^2 - 4x + k \,;\, x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3k \,;\, x < 2 \end{cases}$ ۱,۵

$x^2 - 4x + k \to \min \Big| -\frac{b}{2a} = 2 \xrightarrow[\text{دامنه}]{x \geq 2}$ اکیدا صعودی

$R = [k-4, +\infty)$

$-x^2 + 6x + 3k \to \max \Big| -\frac{b}{2a} = 3 \xrightarrow[\text{دامنه}]{x < 2}$ اکیدا صعودی

$R = (-\infty, 3k+8]$

$\Rightarrow -x^2 + 6x + 3k \leq x^2 - 4x + k \to 2x^2 - 10x - 2k \geq 0 \to x^2 - 5x - k \geq 0$

$k - 4 \geq 3k + 8 \to 2k \leq -12$

$k \leq -6$

؟

کلمات اصلی

۶-

$$f(x)=3x+|x|=\begin{cases}4x & x\geq 0 \\ f(x)\geq 0 \\ 2x & x<0 \\ f(x)<0\end{cases} \Longrightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{4} & x\geq 0 \\ \frac{x}{2} & x<0\end{cases}$$

۲

$$\longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x}{8}-\frac{|x|}{8}$$

a b

$a=\frac{3}{8}$ $b=\frac{-1}{8}$

$ab=\frac{-3}{64}$

۷-

$f(1)=10 \longrightarrow \frac{10}{2+m}=-10 \rightarrow -20-10m=10 \rightarrow -10m=30 \rightarrow m=-3 \rightarrow f(x)=\frac{3x+4}{x-3}$

همچنین $f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x-3}$, $f\circ f^{-1}(x)=f\circ f(x)=\frac{3\left(\frac{3x+4}{x-3}\right)+4}{\frac{3x+4}{x-3}-3}=\frac{\frac{9x+12+4x-12}{x-3}}{\frac{3x+4-3x+9}{x-3}}=\frac{13x}{13}=x$

$f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x+\frac{3x+4}{x-3}=$

$=\frac{x^2-3x+3x+4}{x-3}=\frac{x^2+4}{x-3}\rightarrow\frac{x^2+4}{x-3}=x$

$\rightarrow x^2+4=x^2-3x \rightarrow -3x=4 \rightarrow 3x=-4 \rightarrow x=-\frac{4}{3}$

۲

۸-

$f(3-2x)=t \rightarrow f^{-1}(t)=3-2x \rightarrow x=\frac{3-f^{-1}(t)}{2}$

$g\left(\frac{x}{2}\right)=2-t \rightarrow g^{-1}(2-t)=\frac{x}{2} \Rightarrow x=2g^{-1}(2-t) \rightarrow t=-2$

$3-f^{-1}(-2)=4g^{-1}(4) \rightarrow f^{-1}(-2)+4g^{-1}(4)=3$

۰

۹-

$f(x)=f^{-1}(x) \rightarrow \frac{2x+4}{x-1}=\frac{x+4}{x-2} \rightarrow x^2-2x-4=0 \rightarrow S=-\frac{b}{a}=2$

$\frac{5x+3}{x-1}-3=\frac{2x+4}{x-1}$, $f^{-1}(x)=\frac{x+4}{x-2}$

$\frac{5x-13}{1-x}\xrightarrow[\text{نسبت به عدد مخالف}]{\text{قرینه}}-\frac{-5x-13}{1+x}=\frac{5x+13}{x+1}\xrightarrow[\text{مخرج واحد یابی}]{\text{دو واحد است}}\frac{5(x-2)+13}{x+1}-3=\frac{2x}{x+1}=f(x)$

$f^{-1}(x)=\frac{-x}{x-2} \rightarrow f(x)=f^{-1}(x) \rightarrow \frac{2x}{x+1}=\frac{-x}{x-2} \rightarrow -x^2-x=2x^2-4x \rightarrow 3x^2-3x=0$

$\longrightarrow \alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}=\frac{3}{3}=1$

۲

۱۰-

$f(x): y=x+4[x] \xrightarrow{f^{-1}(x)} x=y+4[y] \longrightarrow [x]=[y+4[y]]=[y]+4[y]=5[y]=[x]$

$\longrightarrow x=y+\frac{4[x]}{5} \rightarrow y=x-\frac{4[x]}{5}=f^{-1}(x)=g(x)$

$f-g(x)=f-f^{-1}(x)=x+4[x]-\left(x-\frac{4[x]}{5}\right)=4[x]+\frac{4[x]}{5}=\frac{24[x]}{5}$

کامیاب باشید

CamScanner