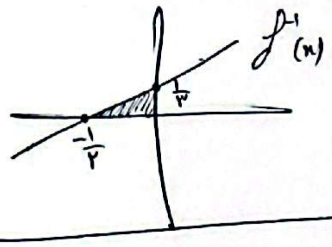
۱-

$f(x): 2y = 3x - 1 \to f^{-1}(x): 2x = 3y - 1 \to 3y = 2x + 1 \to y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$



$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

۲-

الف) $x^2 - 2x + 3 \to \min \Big| \frac{-b}{2a} = 1$
$x \in [1, +\infty)$ $\longrightarrow$ یک به یک است $\to f(x) = (x-1)^2 + 2 \to f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-2} + 1$

چون دامنه بعد از ۱ لازم است

$\xrightarrow{D_f = [1,+\infty)} R_{f^{-1}} = D_f \to f^{-1}(x) = +\sqrt{x-2} + 1$

ب) $x^2 - 2x + 3 \ , \ x \in [3, +\infty)$ $\longrightarrow$ یک به یک است $\to f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$R_f = [6, +\infty) \to D_{f^{-1}(x)} = [6, +\infty)$

$\to f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1 \ , \ x \in [6, +\infty)$

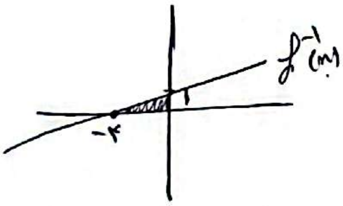
۳-

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{4(x-2)^2} = 2x - 2\sqrt{(x-2)^2} = 2x - 2|x-2|$

$4x^2 - 16x + 16 = 4(x-2)^2$

$\to f(x) = \begin{cases} 4 & x \geq 2 \\ 4x - 4 & x < 2 \end{cases}$

تابع در این بازه وارون پذیر است



$f(x) = 4x - 4 \to f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 1$

$S = \frac{4 \times 1}{2} = 2$

۴-

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5} \to \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_1^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_2^2 \to x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = \pm x_2$

x_1 و x_2 هم علامت‌اند پس این جواب غلط است و $x_1 = x_2$، و تابع یک به یک است

$f^{-1}(x): x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 5}} \to x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 5} \to y^2 = \frac{5x^2}{x^2 - 1} \to y = \pm\sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}}$ ← y و x هم علامت‌اند

$\to f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}}$

۵-

$g(x) \begin{cases} x^2 - 4x + K \ ; \ x \geq 2 \longrightarrow \min \Big| \frac{-b}{2a} = 2 \xrightarrow[\text{دامنه}]{x \geq 2} \text{اکیداً صعودی} \\ -x^2 + 6x + 3K \ ; \ x < 2 \longrightarrow \max \Big| \frac{-b}{2a} = 3 \xrightarrow[\text{دامنه}]{x < 2} \text{اکیداً صعودی} \end{cases}$

$\Rightarrow -x^2 + 6x + 3K \leq x^2 - 4x + K \to 2x^2 - 10x - 2K \geq 0 \to x^2 - 5x - K \geq 0$

؟

طاهر رحیمی

-۶

$$f(x)=3x+|x|=\begin{cases}4x & x\geq 0 \quad f(x)\geq 0\\ 2x & x<0 \quad f(x)<0\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{4} & x\geq 0\\ \frac{x}{2} & x<0\end{cases}$$

$$\to f^{-1}(x)=\frac{3x}{8}-\frac{|x|}{8} \qquad ab=-\frac{3}{64}$$

$$a=\frac{3}{8} \qquad b=-\frac{1}{8}$$

-۷

$$f(2)=10\to\frac{10}{2+m}=-10\to -20-10m=10\to -10m=30\to \boxed{m=-3}\to \boxed{f(x)=\frac{3x+4}{x-3}}$$

همچنین $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x-3}}$, $fof^{-1}(x)=fof(x)=\dfrac{3\left(\frac{3x+4}{x-3}\right)+4}{\frac{3x+4}{x-3}-3}=\dfrac{\frac{9x+12+4x-12}{x-3}}{\frac{3x+4-3x+9}{x-3}}=\frac{13x}{13}=\boxed{x}$

$$fof^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x+\frac{3x+4}{x-3}=\frac{x^2-\cancel{3x}+\cancel{3x}+4}{x-3}=\frac{x^2+4}{x-3}\to\frac{x^2+4}{x-3}=x$$

$$\to \cancel{x^2}+4=\cancel{x^2}-3x\to -3x=4\to 3x=-4\to x=-\frac{4}{3}$$

-۸

-۹

$$\frac{5x-13}{1-x}\xrightarrow[\text{نسبت به مبدأ مختصات}]{\text{قرینه}}-\frac{-5x-13}{1+x}=\frac{5x+13}{x+1}\xrightarrow[\text{سه واحد پایین}]{\text{دو واحد راست}}\frac{5(x-2)+13}{x+1}-3=\boxed{\frac{2x}{x+1}=f(x)}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{-x}{x-2}\to f(x)=f^{-1}(x)\to\frac{2x}{x+1}=\frac{-x}{x-2}\to -x^2-x=2x^2-4x\to 3x^2-3x=0$$

$$\to \alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}=\frac{3}{3}=1$$

-۱۰

$$f(x): y=x+4[x]\xrightarrow{f^{-1}(x)}x=y+4[y]\longrightarrow [x]=[y+4[y]]=[y]+4[y]=\boxed{5[y]=[x]}$$

$$\longrightarrow x=y+\frac{4[x]}{5}\to\boxed{y=x-\frac{4[x]}{5}=f^{-1}(x)}=g(x)$$

$$f-g(x)=f-f^{-1}(x)=x+4[x]-\left(x-\frac{4[x]}{5}\right)=4[x]+\frac{4[x]}{5}=\frac{24[x]}{5}$$

کامل امینی