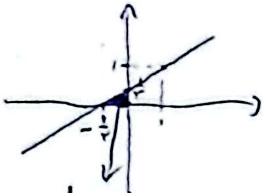
نام و نام خانوادگی ......[illegible]...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..۱۰.. کلاس ...[illegible] B...

آفرین ۱۹/۵

۱

$f(x)=\frac{3x-1}{2} \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3} \longrightarrow$



$$S=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

②

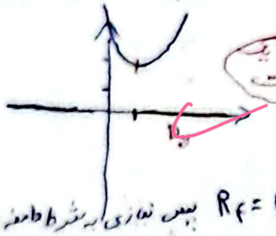
۲

الف) $y=x^2-2x+3 \qquad x\in[1,+\infty)$

$f(x)=y=(x-1)^2+2 \longrightarrow \sqrt{y-2}+1=x=f^{-1}(x)$

$\downarrow$

$\boxed{\sqrt{x-2}+1=y}=f^{-1}(x)$



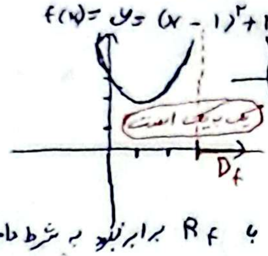
یک به یک است

نیازی به شرط دامنه ندارد

$R_f=[2,+\infty)$ و $D_{f^{-1}}=[2,+\infty)$ یعنی نیازی به شرط دامنه ندارد

ب) $y=x^2-2x+3 \qquad x\in[3,+\infty)$

$f(x)=y=(x-1)^2+2$



یک به یک است

$\longrightarrow R_f=[6,+\infty)$ ②

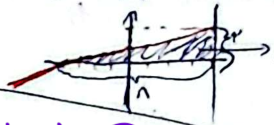
$\sqrt{x-2}+1=y=f^{-1}(x)$

$x\in[6,+\infty)$ ← چون $D_{f^{-1}}$ با R_f برابر نبود به شرط دامنه نیاز داشت

۳

$f(x)=2x-\sqrt{16-4x(4-x)} \Rightarrow f(x)=2x-\sqrt{16-16x+4x^2} \longrightarrow f(x)=2x-\sqrt{(2x-4)^2} \longrightarrow$ ۱/۵

$\longrightarrow 2x-|2x-4|=f(x)$



$\longrightarrow S=\frac{2\times 8}{2}=\boxed{8}$

$$f(x)\begin{cases}4 & [illegible]\ x\in[2,+\infty) \\ 4x-4 & [illegible]\ x\in(-\infty,2)\end{cases}$$

وارون ناپذیر

۴

$S=\frac{4(1+2)}{2}=⑥$

وارون پذیر $\longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{4} \qquad x\in(-\infty,4)\cup\{4\}$

۴

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \longrightarrow f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \xrightarrow[\text{هستند}]{x_1 \text{ و } x_2 \text{ هم علامت}} \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5}$

$\longrightarrow \cancel{x_2^2x_1^2}-5x_1^2=\cancel{x_2^2x_1^2}-5x_2^2 \longrightarrow x_1^2=x_2^2 \longrightarrow x_1=\pm x_2$

غ ق ق چون x_1 و x_2 هم علامتند $\longrightarrow$ یک به یک است

②

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \longrightarrow x=\frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \longrightarrow x^2=\frac{y^2}{y^2-5} \longrightarrow x^2y^2-5x^2=y^2 \longrightarrow y^2(x^2-1)=5x^2 \longrightarrow y^2=\frac{5x^2}{x^2-1}$

$y=\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2-1}}}$

۵

$$g(x)\begin{cases}x^2-4x+k & x\ge 2 \xrightarrow{} \text{یک به یک و اکیداً صعودی} \\ -x^2+6x+3k & x<2 \xrightarrow{} \text{یک به یک و اکیداً صعودی}\end{cases}$$

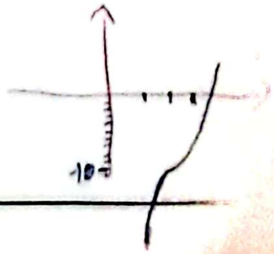
$\xrightarrow{x=2} \overset{4}{\cancel{x^2}}-\overset{-8}{\cancel{4x}}+k \ge -\overset{-4}{\cancel{x^2}}+\overset{12}{\cancel{6x}}+3k$

$-4+k\ge 8+3k$

$-12\ge 2k$

$\boxed{-6\ge k}$

②



۶

$$f(x)=۳x+|x| \longrightarrow f(x)\begin{cases} ۴x & x\geq ۰ \\ ۲x & x<۰ \end{cases} \longrightarrow f^{-1}(x)\begin{cases} \frac{x}{۴} & x\geq ۰ \\ \frac{x}{۲} & x<۰ \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow f^{-1}(x)=ax+b|x| \to f^{-1}(x)=\underset{a}{\frac{۳}{۸}}x-\underset{b}{\frac{۱}{۸}}|x| \longrightarrow ab=\frac{۳}{۸}\cdot\frac{-۱}{۸}=\boxed{\frac{-۳}{۶۴}=ab}$$

✓ (۲)

۷

$$f(x)=\frac{۳x+۴}{x+m} \xrightarrow{(۲،۱۰)} \frac{\overset{۱۰}{\cancel{۳\times۲+۴}}}{۲+m}=-۱۰ \to m=-۳ \to f(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳}$$

چون مجانب افقی $=۳$
چون مجانب قائم $=۳$
$\to$ در نتیجه تابع و $f^{-1}(x)=f(x)$

$$y=\overset{x}{\cancel{f\circ f^{-1}(x)}}+f^{-1}(x)$$
تقاطع با نیمساز اول و سوم $\longrightarrow$

$$\cancel{x}=\cancel{x}+\frac{۳x+۴}{x-۳} \to ۰=\frac{۳x+۴}{x-۳}$$

✓ (۲)

$$\to \boxed{x=-\frac{۴}{۳}}$$ ✓

۸

$$f(۳-۲x)=۲-g\left(\frac{x}{۲}\right) \longrightarrow -۲=۲-g\left(\frac{x}{۲}\right) \to g\left(\frac{x}{۲}\right)=۴ \to g^{-1}(۴)=\frac{x}{۲}$$

$$\downarrow \qquad ۲g^{-1}(۴)=x$$

$$f(۳-۲x)=-۲ \to f^{-1}(-۲)=۳-۲x \longrightarrow \frac{۳-f^{-1}(-۲)}{۲}=x$$

✓ (۲)

$$\frac{۳-f^{-1}(-۲)}{۲}=۲g^{-1}(۴) \to ۳-f^{-1}(-۲)=۴g^{-1}(۴) \to ۴g^{-1}(۴)+f^{-1}(-۲)=\boxed{۳}$$ ✓

۹

$$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \xrightarrow[\substack{x\to -x \\ y\to -y}]{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-\frac{-۵x-۱۳}{۱-(-x)} \Rightarrow y=\frac{۵x+۱۳}{۱+x} \xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} y=\frac{۵(x-۲)+۱۳}{۱+x-۲}$$

$$\longrightarrow y=\frac{۵x+۳}{x-۱} \xrightarrow[y\to y-۳]{\text{۳ واحد پایین}} y=\frac{۵x+۳}{x-۱}-۳ \to y=\frac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱} \to f(x)=\frac{۲x+۶}{x-۱}$$

✓ (۲)

$$yx-y=۲x+۶ \longrightarrow x(y-۲)=y+۶ \to f^{-1}(x)=\frac{x+۶}{x-۲}$$

$$\nearrow \frac{۲x+۶}{x-۱}=\frac{x+۶}{x-۲} \Rightarrow x^۲-۳x-۶=۰$$ ✓

جمع ریشه ها $=\frac{-b}{a}=\frac{۳}{۱}=\boxed{۳}$

۱۰

$$f(x)=x+۴[x] \longrightarrow y=x+۴[x] \xrightarrow[\text{یا قرینه نسبت به } x=y]{\text{وارون}} x=y+۴[y] \to [x]=[y+۴[y]]$$

$$[x]=[y]+۴[y] \longrightarrow [x]=۵[y] \to \frac{۱}{۵}[x]=[y] \longrightarrow x=y+\frac{۴}{۵}[x]$$

✓ (۲)

$$\downarrow \qquad f^{-1}=g=x-\frac{۴}{۵}[x]$$

$$(f-g)(x)=(x+۴[x])-\left(x-\frac{۴}{۵}[x]\right)=\frac{۲۴}{۵}[x] \quad x\in[۵k,۵k+۱)$$

$$D_{(f-g)}=D_f^{R}\cap D_g^{[۵k,۵k+۱)}$$ ✓