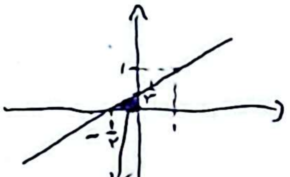
نام و نام خانوادگی ...بنیامین [illegible]...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۱۰... کلاس ...دوازدهم [illegible] B......

۱

$f(x)=\frac{۳x-۱}{۲} \longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۱}{۳} \longrightarrow$



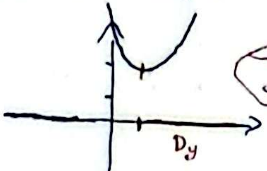
$s=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}}{۲}=\boxed{\frac{۱}{۱۲}}$

۲

الف)

$y=x^۲-۲x+۳ \qquad x\in[۱,+\infty)$

$f(x)=y=(x-۱)^۲+۲ \longrightarrow \sqrt{y-۲}+۱=x=f^{-۱}(x)$



یک به یک است

$\boxed{\sqrt{x-۲}+۱=y}=f^{-۱}(x)$

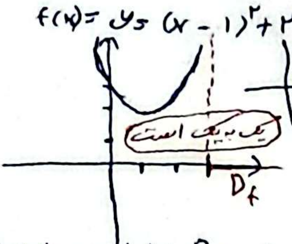
نیازی به شرط دامنه ندارد

$R_f=[۲,+\infty)$ و $D_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$ پس نیازی به شرط دامنه ندارد

ب)

$y=x^۲-۲x+۳ \qquad x\in[۳,+\infty)$

$f(x)=y=(x-۱)^۲+۲$



$\longrightarrow R_f=[۶,+\infty)$

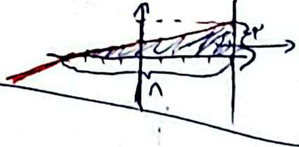
$\boxed{\sqrt{x-۲}+۱=y=f^{-۱}(x) \quad x\in[۶,+\infty)}$

← چون $D_{f^{-۱}}$ با R_f برابر نبود به شرط دامنه نیاز داشت

۳

$f(x)=۲x-\sqrt{۱۶-۴x(۴-x)} \Rightarrow f(x)=۲x-\sqrt{۱۶-۱۶x+۴x^۲} \longrightarrow f(x)=۲x-\sqrt{(۲x-۴)^۲} \longrightarrow$

$\longrightarrow ۲x-|۲x-۴|=f(x)$



$\longrightarrow s=\frac{۲\times ۸}{۲}=\boxed{۸}$

$f(x)\begin{cases} ۴ & [illegible] \ x\in[۲,+\infty) \\ ۴x-۴ & [illegible] \ x\in(-\infty,۲) \end{cases}$

وارون ناپذیر

وارون پذیر $\longrightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۴} \qquad x\in(-\infty,۴)\cup\{۴\}$

۴

۴

$y=\frac{x}{\sqrt{x^۲-۵}} \longrightarrow f(x_۱)=f(x_۲) \longrightarrow \frac{x_۱}{\sqrt{x_۱^۲-۵}}=\frac{x_۲}{\sqrt{x_۲^۲-۵}} \xrightarrow[\text{هستند}]{\text{x ها هم علامت}} \frac{x_۱^۲}{x_۱^۲-۵}=\frac{x_۲^۲}{x_۲^۲-۵}$

$\longrightarrow \cancel{x_۲^۲x_۱^۲}-۵x_۱^۲=\cancel{x_۲^۲x_۱^۲}-۵x_۲^۲ \longrightarrow x_۱^۲=x_۲^۲ \longrightarrow x_۱=\pm x_۲$

غ ق ق چون x ها هم علامتند

$\longrightarrow$ یک به یک است

$y=\frac{x}{\sqrt{x^۲-۵}} \longrightarrow x=\frac{y}{\sqrt{y^۲-۵}} \longrightarrow x^۲=\frac{y^۲}{y^۲-۵} \longrightarrow x^۲y^۲-۵x^۲=y^۲ \longrightarrow y^۲(x^۲-۱)=۵x^۲ \longrightarrow y^۲=\frac{۵x^۲}{x^۲-۱}$

$y=\sqrt{\frac{۵x^۲}{x^۲-۱}} \Rightarrow \boxed{f^{-۱}(x)=\frac{\sqrt{۵}x}{\sqrt{x^۲-۱}}}$

۵

$g(x)\begin{cases} x^۲-۴x+k & x\geq ۲ \xrightarrow{} \text{یک به یک و اکیداً صعودی} \\ -x^۲+۶x+۳k & x<۲ \xrightarrow{} \text{یک به یک و اکیداً صعودی} \end{cases}$

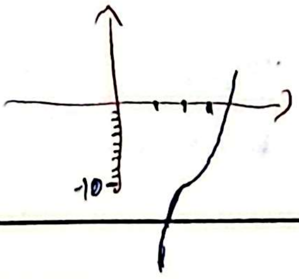
$\xrightarrow{x=۲} \cancel{x^۲}\cancel{-۴x}+k \geq \cancel{-x^۲}+\cancel{۶x}+۳k$

۴ −۸ −۴ ۱۲

$-۴+k\geq ۸+۳k$

$-۱۲\geq ۲k$

$\boxed{-۶\geq k}$



۶

$$f(x)=3x+|x| \rightarrow f(x)\begin{cases}4x & x\geq 0\\ 2x & x<0\end{cases} \rightarrow f^{-1}(x)\begin{cases}\frac{x}{4} & x\geq 0\\ \frac{x}{2} & x<0\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=ax+b|x| \rightarrow f^{-1}(x)=\underset{\downarrow\,a}{\frac{3}{8}}x+\underset{\downarrow\,b}{\frac{1}{8}}|x| \rightarrow ab=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}=\boxed{\frac{3}{64}=ab}$$

۷

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+m}\xrightarrow{(2,10)}\frac{\overset{10}{\cancel{3(2)+4}}}{2+m}=-10\rightarrow m=-3\rightarrow f(x)=\frac{3x+4}{x-3}$$

مجانب افقی $=3$
مجانب قائم $=3$
← در نتیجه تابع $f^{-1}(x)=f(x)$

$$y=\cancel{f\circ f^{-1}(x)}^{\,x}+f^{-1}(x)\ \xrightarrow[\text{اول و سوم}]{\text{نقاط تقاطع با نیمساز}}\ \cancel{x}=\cancel{x}+\frac{3x+4}{x-3}\rightarrow 0=\frac{3x+4}{x-3}$$

$$\rightarrow\boxed{x=-\frac{4}{3}}$$

۸

$$f(3-2x)=2-g\left(\frac{x}{2}\right)\qquad -2=2-g\left(\frac{x}{2}\right)\rightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)=4\rightarrow g^{-1}(4)=\frac{x}{2}$$

$$f(3-2x)=-2\rightarrow f^{-1}(-2)=3-2x\rightarrow\frac{3-f^{-1}(-2)}{2}=x\qquad 2g^{-1}(4)=x$$

$$\frac{3-f^{-1}(-2)}{2}=2g^{-1}(4)\rightarrow 3-f^{-1}(-2)=4g^{-1}(4)\rightarrow 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=\boxed{3}$$

۹

$$y=\frac{5x-13}{1-x}\xrightarrow[\substack{x\to -x\ \leftarrow\ \text{مبدأ}\\ y\to -y}]{\text{قرینه نسبت به}}-y=\frac{-5x-13}{1-(-x)}\Rightarrow y=\frac{5x+13}{1+x}\xrightarrow[x\to x-2]{\text{۲ واحد به راست}}y=\frac{5(x-2)+13}{1+x-2}$$

$$\rightarrow y=\frac{5x+3}{x-1}\xrightarrow[y\to y-3]{\text{۳ واحد پایین}}y=\frac{5x+3}{x-1}-3\rightarrow y=\frac{5x+3-3x+3}{x-1}\rightarrow f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$$

$$yx-y=2x+6\rightarrow x(y-2)=y+6\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2}\nearrow\ \frac{2x+6}{x-1}=\frac{x+6}{x-2}\Rightarrow x^2-3x-6=0$$

جمع ریشه‌ها $=\frac{-b}{a}=\frac{3}{1}=\boxed{3}$

۱۰

$$f(x)=x+4[x]\rightarrow y=x+4[x]\xrightarrow[\text{یا قرینه نسبت به } x \text{ و } y]{\text{وارون}}x=y+4[y]\rightarrow[x]=[y+4[y]]$$

$$[x]=[y]+4[y]\rightarrow[x]=5[y]\rightarrow\frac{1}{5}[x]=[y]\rightarrow x=y+\frac{4}{5}[x]$$

$$f^{-1}=g=x-\frac{4}{5}[x]$$

$$(f-g)(x)=(x+4[x])-\left(x-\frac{4}{5}[x]\right)=\boxed{\frac{24}{5}[x]\quad x\in[5k,5k+1)}$$

$$D_{(f-g)}=\cancel{D_f}^{\,R}\cap\cancel{D_g}^{\,[5k,5k+1)}$$