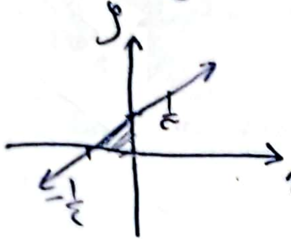
ماهان نژادکرد — تکلیف ۱. — ریاضی دهم تجربی B

۱۹٫۵ آفرین

۱-

$2y = 3x - 1 \Rightarrow \frac{2y+1}{3} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$



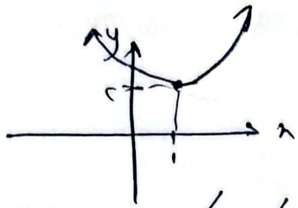
$S = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}$

۲

۲-

الف) $y = x^2 - 2x + 3$

$x \in [1, +\infty)$



$R_f = D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

با توجه به نمودار تابع در بازه مربوطه یک به یک است پس معکوس پذیر است:

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow \pm\sqrt{y-2} = x - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-2} + 1$

با توجه به دامنه مثبت را قبول

$x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1 \quad x \in [2, +\infty)}$

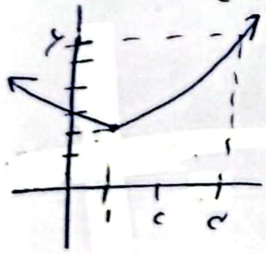
۲

ب) $y = x^2 - 2x + 3$

$x \in [3, +\infty)$

با توجه به تابع رسم شده تابع در بازه مورد نظر یک به یک است و وارون آن همان ضابطه آمده میشود با این تفاوت که دامنه تابع وارون فرق میکند با توجه به شکل داریم:

۱٫۵



$R_f = D_{f^{-1}} = [6, +\infty)$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$x \in [6, +\infty)$

$f(x) = \begin{cases} 4 \\ 4x-4 \end{cases} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4}$

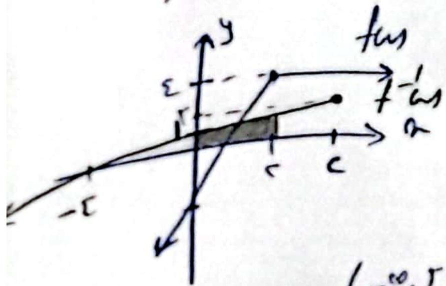
وارون پذیر $x<2$

۳-

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - |2x-4|$

$4x-4$	2	4

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$



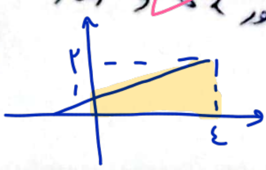
با توجه به شکل تابع در بازه $(-\infty, 2]$ وارون پذیر است

$y = 4x - 4 \Rightarrow \frac{y+4}{4} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 1$

$x \le 2 \Rightarrow 4x \le 8 \Rightarrow 4x - 4 \le 4 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 4]$

مساحت ناحیه محدود بین f + محور xها و $f^{-1}(x)$ در بازه $(-\infty, 2]$

$S = \frac{(1 + 1.5) \times 2}{2} = 2.5$



$\rightarrow S = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

۴ـ

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow \begin{cases}(x_1,y_1)\in f,\ y_1=y_2\\ (x_2,y_2)\in f\end{cases} \Longrightarrow x_1=x_2$$

۲

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5} \Rightarrow x_1^2x_2^2-5x_1^2=x_1^2x_2^2-5x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2=x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

غ ق ق است زیرا x_1 و x_2 هم علامت هستند پس $x_1=x_2$ است و تابع یک به یک است

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{x^2-5} \Rightarrow x^2=\frac{5y^2}{y^2-1} \Rightarrow x=\pm\frac{y\sqrt5}{\sqrt{y^2-1}}$$

غ ق ق

زیرا x و y هم علامت هستند

$$f^{-1}(x)=\frac{x\sqrt5}{\sqrt{x^2-1}}$$

۵ـ

$$y(x)=\begin{cases}x^2-4x+k & x\geq 2 \Rightarrow x_s=\frac{-b}{2a}=2 \Rightarrow R_f=[k-4,+\infty)\\ -x^2+6x+3k & x<2 \Rightarrow x_s=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-2}=3\end{cases}$$

۳ در بازه نیست

۲

$$R_f=(-\infty,8+3k)$$

برای آنکه تابع یک به یک باشد برد دو ضابطه نباید اشتراک داشته باشند (البته سایر شرایط هم در دو ضابطه باید در دامنه منفرد هم یک به یک باشند که این شرط برقرار است)

$$8+3k\leq k-4$$

$$\Rightarrow 2k\leq -12 \Rightarrow k\leq -6$$

$$\Rightarrow k\in(-\infty,-6]$$

۶ـ

$$f(x)=\begin{cases}4x & x\geq 0 \rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=[0,+\infty),\ f^{-1}(x)=\frac{x}{4}\\ 2x & x<0 \rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=(-\infty,0),\ f^{-1}(x)=\frac{x}{2}\end{cases}$$

۲

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{4} & x\geq 0\\ \frac{x}{2} & x<0\end{cases} \Longrightarrow \frac{x}{4}+\frac{x}{2}=\frac{3x}{4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x}{8}-\frac{1}{8}|x|$$

$$\rightarrow a=\frac{3}{8},\ b=-\frac{1}{8} \rightarrow ab=\frac{3}{8}\times\frac{-1}{8}=\frac{-3}{64}$$

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+m} \Rightarrow f(2)=\frac{10}{2+m}=-10 \Rightarrow \boxed{m=-3}$$ ۷-

$$f(x)=\frac{3x+4}{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x-3}$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=\mathbb{R}-\{3\}$$

$$y=f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x+f^{-1}(x) \quad ; \quad x+f^{-1}(x)=x \Rightarrow f^{-1}(x)=0$$

$$y=x$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4}{x-3}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-\frac{4}{3}}$$

۲

$$f(3-2x)=2-g\left(\frac{x}{2}\right)$$ ۸-

$$\Rightarrow 2-g(x)=f(3-4x) \Rightarrow g(x)=2-f(3-4x)=t$$

$$\Rightarrow 2-t=f(3-4x) \Rightarrow f^{-1}(2-t)=3-4x \Rightarrow x=\frac{3-f^{-1}(2-t)}{4}$$

$$g(x)=t \Rightarrow g^{-1}(t)=x \Rightarrow g^{-1}(t)=\frac{3-f^{-1}(2-t)}{4}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{3-f^{-1}(2-x)}{4} \Rightarrow 4g^{-1}(x)=3-f^{-1}(2-x) \Rightarrow 4g^{-1}(x)+f^{-1}(2-x)=3$$

۲

$$\xrightarrow{x=4} 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=\boxed{3}$$

$$f(3-2x)=2-g\left(\frac{x}{2}\right)=-2 \Rightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)=4 \Rightarrow g^{-1}(4)=\frac{x}{2} \quad ; \quad 4g^{-1}(x)=2x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-2)=3-2x$$

راه دوم: $f^{-1}(-2)=3-2x$

$$\Rightarrow \boxed{4g^{-1}(x)+f^{-1}(x)=3}$$

۹ـ برای قرینه کردن یک تابع نسبت به مبدأ آن را نسبت به محور x و y قرینه میکنیم

$$y=-\frac{-5x-13}{1+x}=\frac{5x+13}{1+x} \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=\frac{5(x-2)+13}{1+(x-2)}=\frac{5x+3}{x-1}$$

۲

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y=\frac{5x+3}{x-1}-3=\frac{2x+6}{x-1} \Rightarrow f(x)=\frac{2x+6}{x-1} \quad , \quad f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2}$$

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{2x+6}{x-1}=\frac{x+6}{x-2} \Rightarrow x^2+5x-6=2x^2+2x-12 \Rightarrow x^2-3x-6$$

$$\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=3$$

۱ـ با قرینه کردن نسبت به خط $y = x$ ضابطه‌ی تابع وارون را داریم:

۲

$$y = x + 2[x] \Rightarrow x = y - \cancel{2}[x]$$

$$\Rightarrow [y] = [x + 2[x]] = \cancel{5}[x]$$

براکت میگیریم دو طرف

$$x = y - \frac{2[y]}{5}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{2[x]}{5} = g(x)$$

$$(f - g)(x) = x + 2[x] - \left(x - \frac{2[x]}{\cancel{5}}\right) = 2[x] + \frac{2[x]}{5} = \frac{12[x]}{5}$$