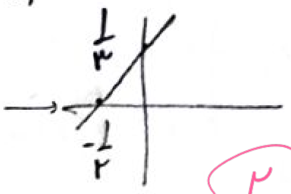
تکلیف شماره ۱۰ — بنام خدا — ریاضیات گسسته - دوازدهم پسر B

۱۸/۷۵

-۱

$f(x)=2y \,,\, f(x)=2x-1 \qquad f^{-1}: 2x+1=2y \qquad f^{-1}=\frac{2x+1}{3}-1=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \longrightarrow$



۲

$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{12}$

---

-۲

الف)

$y=x^2-2x+3 \,,\, x\in[1,+\infty) \qquad -\frac{b}{2a}=1$ (یک به یک)

$f^{-1}: x=(y-1)^2+2 \longrightarrow y-1=\sqrt{x-2} \longrightarrow y=\sqrt{x-2}+1 \qquad D_{f^{-1}}=[2,+\infty)$

---

ب)

$y=x^2+2x+3 \longrightarrow x\in[3,+\infty) \qquad -\frac{b}{2a}=1$ (یک به یک)

۲

$y^{-1}=\sqrt{x-2}+1 \qquad x\geq 6 \qquad R_{f^{-1}}=[6,+\infty)$

---

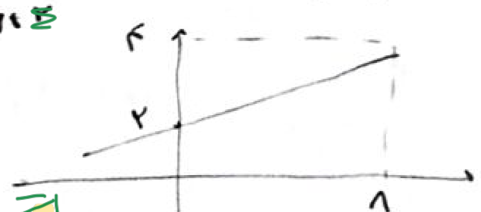
-۳ ۱/۲۵

$f(x)=2x-\sqrt{16-4x(4-x)}=2x-\sqrt{4(4-x^2)}=2x-2|4x| \qquad D_f=(-\infty,4]$

$2x-|2x-4|$

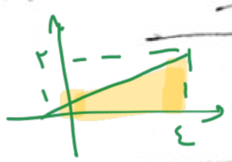
ابتدا صعودی است پس یک به یک

$x\in(-\infty,4] \to f(x)=4x-\cancel{x}^{4} \to f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\cancel{2}$ ۱



$R_f=(-\infty,8]=D_{f^{-1}(x)} \qquad \frac{6\times 8}{2}=\frac{48}{2}=24$

$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{2} \,,\, D_{f^{-1}}=(-\infty,4]$



$\longrightarrow S=\frac{4\times 3}{2}=6$

---

-۴

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \longrightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \longrightarrow x_1^2x_2^2-5x_1^2-5x_1^2=x_1^2x_2^2 \longrightarrow x_1^2=x_2^2$

۲

$x_1=\pm x_2 \longrightarrow x_1=x_2$ یک به یک

علامت $x, y$ ، $f^{-1}: x=\frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \longrightarrow y^2=\frac{5x^2}{x^2-1}$

$x, y$ هم علامت $\qquad y=\pm\frac{\sqrt{5x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ پس مثبت است (-)

۱۰۰٪ اسکاری

۵-

$$g(x)\begin{cases} x^2-4x+k & x\ge 2 \\ x^2+6x+2k & x<2 \end{cases} \qquad -\frac{b}{2a}=2 \qquad -\frac{b}{2a}=2$$

$k-4 \le 2k+18 \to k \le 6$

۲

۶-

$$f(x)=3x+|x| \qquad \begin{cases} 4x & x\ge 0 \\ 2x & x<0 \end{cases} \qquad f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x & x\ge 0 \\ \frac{1}{2}x & x<0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1.5x}{4}-\frac{\frac{1}{2}|x|}{4}=\frac{15x}{40}-\frac{5}{40}|x| \longrightarrow a=\frac{3}{8},\ b=-\frac{1}{8} \qquad ab=-\frac{3}{64}$$

۲

۷-

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+m} \longrightarrow f(1)=-10 \longrightarrow 10m=-30 \longrightarrow m=-3 \longrightarrow x\neq 3,\ f(-10)=2 \to f^{-1}=f$$

$$y=f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x+\frac{3x+4}{x-3}=x \Rightarrow \frac{3x+4}{x-3}=0 \qquad 3x+4=0 \quad x=-\frac{4}{3}$$

۲

۸-

$$f(3-2x)=2-g\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)=2-f(3-2x) \to g(x)=t \qquad t=2-f(3-4x)$$

$$f^{-1}(2-t)=3-4x \longrightarrow f^{-1}(2-t)=3-4g^{-1}(t)=3-f(-2)$$

$$g^{-1}(t)=x \longrightarrow 4g^{-1}(4)=f^{-1}(-2)=3$$

۲

۹-

$$y=\frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow{\text{قرینه}} \frac{5x+3}{x-1} \longrightarrow \frac{5x+3}{x-1}-3=\frac{5x+3-3x+3}{x-1}=\frac{2x+6}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{2x+6}{x-1} \to f^{-1}(x)=x=\frac{2y+6}{y-1} \to y=\frac{6+x}{x-2} \to f^{-1}(x) \longrightarrow \frac{6+x}{x-2}=\frac{2x+6}{x-1}$$

$$x^2+5x-6 \to (x-6)(x+1) \to 2x^2+2x-12 \to x^2-3x-6=0 \to -\frac{b}{a}=-\frac{(-3)}{1}=3$$

۲

سوال ۱۰ پاسخ

۱

۱۰-

$f(x) = x + ۴[x] \to g(x) = f^{-1}(x) \to x = y + ۴[y] \to y = x - ۴[x] = g(x)$

$[y] = [x + ۴[x]] \to [y] = ۵[x] \to f(x) - g(x) = x + ۴[x] - x + ۴[x] = ۸[x]$

$[x] = \frac{[y]}{۵} \to f^{-1}(x) = x - ۰/۸[x]$

$f - g = x + ۴[x] - x + ۰/۸[x] = ۴/۸[x]$