نام و نام خانوادگی .... [illegible]

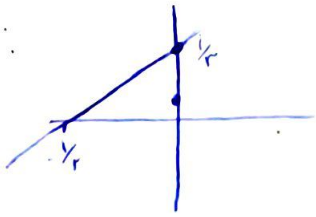
پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره .... کلاس ....

۱۴/۲۵ آفرین

۱

$2y=3x-1 \longrightarrow 2y+1=3x \longrightarrow 3y=2x+1 \longrightarrow y=\frac{2x+1}{3} \longrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

$0=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \to \boxed{x=-\frac{1}{2}}$



$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\boxed{\frac{1}{12}}$

(۲)

۲

الف) $y=x^2-2x+3 \Rightarrow \longrightarrow \Delta<0 \to$ بی‌شمار $\longrightarrow \frac{-b}{2a}=1 \to x=1 \to y=2 \to$ شکل تابع

$\longrightarrow x\in[1,+\infty) \longrightarrow$ یک‌به‌یک

$x^2-2x+3 \to (x-1)^2+2=y \longrightarrow (y-1)^2+2=x \longrightarrow (y-1)^2=x-2 \to y-1=\sqrt{x-2} \to \boxed{y=\sqrt{x-2}+1}$

$D_{f^{-1}}=[2,+\infty)$

(۲)

ب) $y=x^2-2x+3 \longrightarrow$ شکل تابع

$\to x\in[3,+\infty) \longrightarrow$ یک‌به‌یک

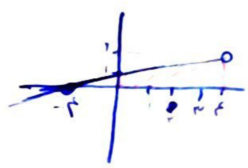
$x^2-2x+3 \longrightarrow (x-1)^2+2=y \longrightarrow \boxed{y=\sqrt{x-2}+1} \longrightarrow$ برد تابع f = دامنه تابع f^{-1} $\longrightarrow D_{f^{-1}}=[6,+\infty)$

۳

$f(x)=2x-\sqrt{16-4x(4-x)} \to 2x-\sqrt{4x^2-16x+16} \longrightarrow 2x-\sqrt{(2x-4)^2} \to 2x-|2x-4|$

$2x-|2x-4| \longrightarrow x\geq 2 \longrightarrow 2x-2x+4=4 \longrightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست $\longrightarrow$ غ ق
پس وارون پذیر نیست

$2x-|2x-4| \longrightarrow x<2 \longrightarrow 2x+2x-4=4x-4$



$y=4x-4 \longrightarrow 4x=y+4 \longrightarrow 4y^{-1}=x+4 \to y=\frac{x+4}{4} \Rightarrow y^{-1}=\frac{1}{4}x+1 \longrightarrow$

$\longrightarrow y^{-1}=\frac{1}{4}x+1 \to R_{y^{-1}}=(-\infty,2) \to D_{y^{-1}}=(-\infty,4)$

[illegible] $\longrightarrow 8-2=6$

(۲)

۴

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \longrightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \longrightarrow$ x_1 و x_2 هم علامت هستند پس می‌توان به توان ۲ رساند $\longrightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5}$

$\longrightarrow x_1^2x_2^2-5x_1^2=x_1^2x_2^2-5x_2^2 \longrightarrow -5x_1^2=-5x_2^2 \longrightarrow x_1=\pm x_2 \longrightarrow$ نمی‌تواند دو مختلف العلامت باشد پس تابع یک‌به‌یک است $\longrightarrow x_1=x_2$

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \longrightarrow x=\frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \longrightarrow x^2=\frac{y^2}{y^2-5} \longrightarrow x^2y^2-5x^2=y^2 \to$

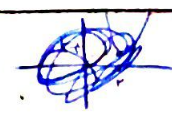
$x^2y^2-y^2=5x^2 \to y^2(x^2-1)=5x^2$

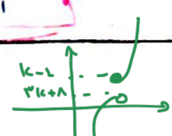
$\to \boxed{y=\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2-1}}}$

(۲)

۵

$g(x)\begin{cases}x^2-4x+k & x\geq 2\\ -x^2+4x+3k & x<2\end{cases} \longrightarrow \frac{-b}{2a}=2 \longrightarrow$





$y=x^2-4x+k \xrightarrow{x\geq 2} R_1=[k-4,+\infty)$ اکیداً صعودی $\quad y=-x^2+4x+3k \xrightarrow{x<2} R_2=(-\infty,3k+8)$ اکیداً صعودی

چون اکسترمم تابع پایین در دامنه تابع بالا قرار دارد پس باید نقاط اکسترمم ناهم برابر باشد

$x^2-4x+k \neq -x^2+4x+3k$

$4-8+k \neq -4+8+3k \longrightarrow -4+k\neq 4+3k \longrightarrow 2k\neq -\frac{13}{2}$

حال k یا از $(-\frac{13}{2},+\infty)$ یا $(-\infty,-\frac{13}{2})$ است که $(-\frac{13}{2},+\infty)$ غ ق ق است.

چون در آن صورت تابع یک‌به‌یک نیست

$\boxed{(-\infty,-\frac{13}{2})}$ $\quad k-4\geq 3k+8$

$2k\leq -12 \to k\leq -6$

(۱/۲۵)

$f(x)=۳x+\lvert x\rvert \longrightarrow x\geq ۰ \longrightarrow ۴x \longrightarrow y=۴x \longrightarrow y=\frac{x}{۴} \to x\geq ۰, y\geq ۰$ $x\geq ۰ \to y\geq ۰$ $x<۰ \longrightarrow ۲x \longrightarrow y=۲x \to x<۰ \to y<۰ \to y=\frac{x}{۲} \to x<۰, y<۰$ $ax+b\lvert x\rvert=g(x) \longrightarrow x\geq ۰, y\geq ۰ \longrightarrow ax+bx=\frac{x}{۴} \to (a+b)x=\frac{۱}{۴}x \to a+b=\frac{۱}{۴}$ $x<۰, y<۰ \longrightarrow ax-bx=\frac{x}{۲} \to (a-b)x=\frac{۱}{۲}x \to a-b=\frac{۱}{۲}$ $a+b=\frac{۱}{۴}$ $a-b=\frac{۱}{۲} \longrightarrow \boxed{a=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۸}} \to \boxed{b=-\frac{۱}{۸}} \boxed{a=\frac{۳}{۸}} \to \boxed{a.b=-\frac{۳}{۶۴}}$ ۲	۶
$f(x)=\frac{۳x+۴}{x+m} \longrightarrow f(۲)=\frac{۶+۴}{۲+m}=-۱۰ \longrightarrow \frac{۱۰}{۲+m}=-۱۰ \to ۲+m=-۱ \to \boxed{m=-۳}$ $f(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳} \longrightarrow y=\frac{۳x+۴}{x-۳} \longrightarrow x=\frac{۳y+۴}{y-۳} \Rightarrow y=\frac{۳x+۴}{x-۳} \to f^{-1}(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳}$ $fof^{-1}(x)=x \longrightarrow D_{f^{-1}}=R_f \longrightarrow R_f=R-\{۳\} \to fof^{-1}(x)=x \to x\neq \{۳\}$ $\frac{۳x+۴}{x-۳}+x=x \Rightarrow \frac{۳x+۴}{x-۳}=۰ \to \boxed{x=-\frac{۴}{۳}}$ ۲	۷
$f(۳-۲x)=۲-g(\frac{x}{۲}) \longrightarrow f(۳-۲x)=-۲ \longrightarrow ۲-g(\frac{x}{۲})=-۲ \longrightarrow g(\frac{x}{۲})=۴$ $\boxed{f^{-1}(-۲)+۴g^{-1}(۴)}$ $g^{-1}(۴)=\frac{x}{۲}, f^{-1}(-۲)=۳-۲x$ $۳-۲x+۲x=۳$ ۲	۸
$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \longrightarrow y=-\frac{۵(-x)-۱۳}{۱-(-x)} \Rightarrow y=\frac{-(-۵x-۱۳)}{۱+x} \to y=\frac{۵x+۱۳}{۱+x}$ $\frac{۵(x-۲)+۱۳}{۱+(x-۲)} \longrightarrow \frac{۵x-۱۰+۱۳}{x-۱}=\frac{۵x+۳}{x-۱} \longrightarrow \frac{۵x+۳}{x-۱}-۳=\frac{۲x+۶}{x-۱}$ $f(x)=\frac{۲x+۶}{x-۱} \longrightarrow y=\frac{۲x+۶}{x-۱} \longrightarrow x=\frac{۲y+۶}{y-۱} \longrightarrow y=\frac{x+۶}{x-۲} \to f^{-1}(x)=\frac{x+۶}{x-۲}$ $\frac{۲x+۶}{x-۱}=\frac{x+۶}{x-۲} \longrightarrow ۲x^۲-۴x+۶x-۱۲=x^۲-x+۶x-۶ \to x^۲-۳x-۶=۰ \longrightarrow \frac{-b}{a}=۳$ $x^۲-۳x \quad -۶$ ۲	۹
$g(x)=f^{-1}(x)$ $x+۴[x]=y \longrightarrow y+۴[y]=x \longrightarrow y=x-۴[y]$ $[y] \longrightarrow [y+۴[y]]=[x] \longrightarrow [y]+۴[y]=[x] \to ۵[y]=[x] \to \frac{[x]}{۵}=[y]$ $y=x-\frac{۴[x]}{۵}$ $f(x)-g(x)=x+۴[x]-x+\frac{۴[x]}{۵}=\frac{۲۴[x]}{۵}$ ۲	۱۰