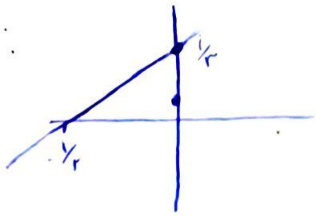
نام و نام خانوادگی ...... امیرحمید ابودلالی

پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره .... کلاس ......

۱

$2y = 3x - 1 \to 2y + 1 = 3x \to 3y = 2x + 1 \to y = \frac{2x+1}{3} \to y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

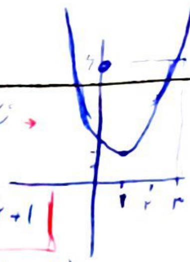
$0 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$



$\frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$

۲

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \Delta < 0 \to$ همیشه مثبت $\to \frac{-b}{2a} = 1 \to x = 1 \to y = 2 \to$ شکل تابع

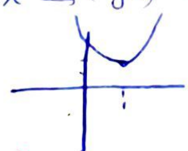


$\to x \in [1, +\infty) \to$ یک به یک

$x^2 - 2x + 3 \to (x-1)^2 + 2 = y \to (y-1)^2 + 2 = x \to (y-1)^2 = x - 2 \to y - 1 = \sqrt{x-2} \to \boxed{y = \sqrt{x-2} + 1}$

$D_{y^{-1}} = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \to$ شکل تابع



$\to x \in [3, +\infty) \to$ یک به یک

$x^2 - 2x + 3 \to (x-1)^2 + 2 = y \to \boxed{y = \sqrt{x-2} + 1} \to$ برد تابع y^{-1} = دامنه تابع y $\to D_y = [6, +\infty)$

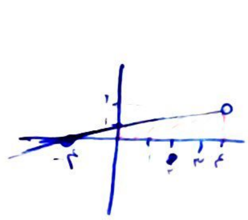
۳

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} \to 2x - \sqrt{4x^2 - 16x + 16} \to 2x - \sqrt{(2x-4)^2} \to 2x - |2x-4|$

$2x - |2x-4| \to x \geq 2 \to 2x - 2x + 4 = 4 \to$ تابع یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست غ ق ق

$2x - |2x-4| \to x < 2 \to 2x + 2x - 4 = 4x - 4$

$y = 4x - 4 \to 4x = y + 4 \to 4y^{-1} = x + 4 \to y = \frac{x+4}{4} \Rightarrow y^{-1} = \frac{1}{4}x + 1$



$\to y^{-1} = \frac{1}{4}x + 1 \to R_{y^{-1}} = (-\infty, 2) \to D_{y^{-1}} = (-\infty, 4)$

حاصل جواب $\to 8 - 2 = 6$

۴

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \to$ x_1 و x_2 هم علامت هستند پس می‌توان به توان ۲ رساند $\to \frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5}$

$\to x_1^2x_2^2 - 5x_1^2 = x_1^2x_2^2 - 5x_2^2 \to -5x_1^2 = -5x_2^2 \to x_1 = \pm x_2 \to$ نمی‌توانند دو مختلف العلامت باشند پس تابع یک به یک است $\to x_1 = x_2$

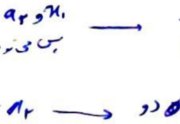
$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \to x = \frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \to x^2 = \frac{y^2}{y^2-5} \to x^2y^2 - 5x^2 = y^2 \to$

$x^2y^2 - y^2 = 5x^2 \to y^2(x^2-1) = 5x^2$

$\to \boxed{y = \frac{\sqrt{5}\, x}{\sqrt{x^2-1}}}$

۵

$g(x) \begin{cases} x^2 - 4x + k & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3k & x < 2 \end{cases} \to \frac{-b}{2a} = 2 \to$



(y)

چون اکسترمم تابع یعنی در دامنه تابع بالا قرار دارد پس باید نقاط اکسترمم تابع برابر باشد $x^2 - 4x + k \neq -x^2 + 6x + 3k$

$4 - 8 + k \neq -4 + 12 + 3k \to -4 + k \neq 9 + 3k \to 2k \neq -\frac{13}{2}$

حال یا ۱۳ از $(-\frac{13}{2}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{13}{2})$ است که $(-\frac{13}{2}, +\infty)$ غ ق ق است.

چون در آن صورت تابع یک به یک نیست

$\boxed{(-\infty, -\frac{13}{2})}$

$f(x)=3x+|x| \longrightarrow x\geq 0 \longrightarrow 4x \longrightarrow y=4x \longrightarrow y=\frac{x}{4} \rightarrow x\geq 0,\ y\geq 0$

$x\geq 0 \rightarrow y\geq 0$

$x<0 \longrightarrow 2x \longrightarrow y=2x \longrightarrow x<0 \rightarrow y<0 \rightarrow y=\frac{x}{2} \rightarrow x<0,\ y<0$

$ax+b|x|=g(x) \longrightarrow x\geq 0,\ y\geq 0 \longrightarrow ax+bx=\frac{x}{4} \rightarrow (a+b)x=\frac{1}{4}x \rightarrow a+b=\frac{1}{4}$

$x<0,\ y<0 \longrightarrow ax-bx=\frac{x}{2} \rightarrow (a-b)x=\frac{1}{2}x \rightarrow a-b=\frac{1}{2}$

$a+b=\frac{1}{4}$

$a-b=\frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{2a=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}} \rightarrow \boxed{b=-\frac{1}{8}},\ \boxed{a=\frac{3}{8}} \longrightarrow \boxed{a\cdot b=-\frac{3}{64}}$ 6

$f(x)=\frac{3x+4}{x+m} \longrightarrow f(2)=\frac{6+4}{2+m}=-1 \longrightarrow \frac{10}{2+m}=-10 \rightarrow 2+m=-1 \rightarrow \boxed{m=-3}$

$f(x)=\frac{3x+4}{x-3} \longrightarrow y=\frac{3x+4}{x-3} \longrightarrow x=\frac{3y+4}{y-3} \Rightarrow y=\frac{3x+4}{x-3} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x-3}$

$f\circ f^{-1}(x)=x \longrightarrow D_{f^{-1}}=R_f \longrightarrow R_f=\mathbb{R}-\{3\} \rightarrow f\circ f^{-1}(x)=x \rightarrow x\neq\{3\}$ 7

$\frac{3x+4}{x-3}+\cancel{x}=\cancel{x} \Rightarrow \frac{3x+4}{x-3}=0 \rightarrow \boxed{x=-\frac{4}{3}}$

$f(3-2x)=2-g\left(\frac{x}{2}\right) \longrightarrow f(3-2x)=-2 \longrightarrow 2-g\left(\frac{x}{2}\right)=-2 \longrightarrow g\left(\frac{x}{2}\right)=4$

$\boxed{f^{-1}(-2)+4g^{-1}(4)}$ 8

$g^{-1}(4)=\frac{x}{2},\quad f^{-1}(-2)=3-2x$

$3-2x+2x=3$

$y=\frac{5x-13}{1-x} \longrightarrow y=-\frac{5(-x)-13}{1-(-x)} \Rightarrow y=-\frac{(-5x-13)}{1+x} \rightarrow y=\frac{5x+13}{1+x}$

$\frac{5(x-2)+13}{1+(x-2)} \longrightarrow \frac{5x-10+13}{x-1}=\frac{5x+3}{x-1} \longrightarrow \frac{5x+3}{x-1}-3=\frac{2x+6}{x-1}$ 9

$f(x)=\frac{2x+6}{x-1} \longrightarrow y=\frac{2x+6}{x-1} \longrightarrow x=\frac{2y+6}{y-1} \longrightarrow y=\frac{x+6}{x-2} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2}$

$\frac{2x+6}{x-1}=\frac{x+6}{x-2} \longrightarrow 2x^2-4x+\cancel{6x}-12=x^2-x+\cancel{6x}-6 \longrightarrow x^2-3x-6=0 \longrightarrow \frac{-b}{a}$ 3

$x^2-3x \quad -6$

$g(x)=f^{-1}(x)$

$x+4[x]=y \longrightarrow y+4[y]=x \longrightarrow y=x-4[y]$

$[y] \longrightarrow [y+4[y]]=[x] \longrightarrow [y]+4[y]=[x] \rightarrow 5[y]=[x] \rightarrow \frac{[x]}{5}=[y]$ 10

$y=x-\frac{4[x]}{5}$

$f(x)-g(x)=x+4[x]-\cancel{x}+\frac{4[x]}{5}=\frac{24[x]}{5}$