نام و نام خانوادگی ...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...... کلاس ...... دوازدهم B

۱	$f(x) = x + [x]$ (اکیداً صعودی + صعودی → اکیداً صعودی). جمع تابع اکیداً صعودی با تابع صعودی اکیداً صعودی است. $y = f^{-1}(x)$ و $f(x)$ قطعاً همدیگر را روی x قطع می‌کنند. $x + [x] = x \to [x] = 0 \to 0 \le x < 1 \to$ بی‌شمار نقطه ب) $\underbrace{f \circ f^{-1}(x)}_{x} = 2x - \frac{3}{2} \to x = 2x - \frac{3}{2} \to x = \frac{3}{2} \to$ جواب $= \varnothing$ با $x \in R_f \to x + [x] \to$ $\frac{3}{2}$ در برد تابع نیست
۲	الف) $\frac{ax+3}{4x+b} \to$ مجانب قائم $= -\frac{b}{4}$، مجانب افقی $= \frac{a}{4}$؛ روی نیمساز ناحیه اول: $-\frac{b}{4} = \frac{a}{4} \to a = -b$ $\to a = -b$ اگر $\to f(x) = f^{-1}(x) \to f \circ f(5 - \sqrt{6}) = f \circ f^{-1}(5 - \sqrt{6})$ ($f = f^{-1}$) $f \circ f^{-1}(x) = x \to f \circ f(5 - \sqrt{6}) = 5 - \sqrt{6}$
۳	$\frac{mx + 3}{x + m + 3} = f \to f^{-1}(x) = \frac{3 - (m+3)x}{x - m}$ $\frac{3 - (m+3)x}{x - m} = \frac{mx + 3}{x + m + 3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (2m+3)x^2 + (4m+9)x - (4m+9) = 0$ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-(4m+9)}{-(4m+9)} = 1$
۴	$f(x) = \sqrt{(2x+5)^2} - \sqrt{(5x-2)^2} = \|2x+5\| - \|5x-2\|$ $x \ge \frac{2}{5} \to f = 2x + 5 - 5x + 2 = -3x + 7 \to x \ge \frac{2}{5} \to -3x \le -\frac{6}{5}$ $-3x + 7 \le -\frac{6}{5} + 7 \to R = (-\infty, \frac{29}{5}]$ $\to f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \quad D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, \frac{29}{5}]$
۵	$g(x) = 2f(3x) - 1 \to \frac{g(x) + 1}{2} = f(3x)$; $g(x) = y$, $g^{-1}(y) = x$ $f(3x) = \frac{y+1}{2} \to f^{-1}(\frac{y+1}{2}) = 3x = 3g^{-1}(y) \to f^{-1}(\frac{x+1}{2}) = 3g^{-1}(x)$ $\to g^{-1}(x) = \frac{1}{3} f^{-1}(\frac{x+1}{2}) \to a = \frac{1}{3}, b = 1, c = 1, d = 0$; $\frac{ac + d}{2b} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{2} = \frac{1}{6}$

۶

$f(x) = x + 2\sqrt{x} \longrightarrow f(x) = (\sqrt{x}+1)^2 - 1 \quad (x \geq 0)$

$\rightarrow y+1 = (\sqrt{x}+1)^2 \rightarrow \pm\sqrt{y+1} = \sqrt{x}+1 \xrightarrow{\sqrt{x}+1 \geq 0} \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x}$

$\pm(\sqrt{y+1} - 1)^2 = x \xrightarrow{x \geq 0} (\sqrt{y+1} - 1)^2 = x \longrightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2$

$\rightarrow (\sqrt{x}+1)^2 - 1 = f(x) \quad \sqrt{x} \geq 0 \rightarrow (\sqrt{x}+1)^2 \geq 1 \rightarrow f(x) \geq 0 \rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

۷

$y = x - 1 + 2^x$ (اکیداً صعودی ، اکیداً صعودی → اکیداً صعودی)

$\xrightarrow[\text{دارای خودوارون قطع با } y=x]{\text{تابع اکیداً صعودی است}} 2^x + x - 1 = x \longrightarrow 2^x = 1$

$\longrightarrow x = 0 \longrightarrow$ نقطهٔ برخورد $(0,0)$ است $\longrightarrow$ ۱ نقطه

۸

$f(x) = x^3 + 4x \longrightarrow g: y = \sqrt{f^{-1}(x) - x}$

D_g: $f^{-1}(x) - x \geq 0 \longrightarrow f^{-1}(x) \geq x \xrightarrow[f^{-1}\circ f \text{ را جایگزاری کرد}]{\text{به جای } x} f^{-1}(x) \geq f^{-1}\circ f(x)$

$\rightarrow x^3 + 4x$ (اکیداً صعودی + اکیداً صعودی) اکیداً صعودی $\longrightarrow f^{-1}$ اکیداً صعودی $\longrightarrow x \geq f(x) \rightarrow x \geq x^3 + 4x$

$x^3 + 3x \leq 0 \longrightarrow x(x^2+3) \leq 0 \longrightarrow x \leq 0 \longrightarrow$ بی‌نهایت

۹

$f(x) = -x + \sqrt{x+4} \quad x \geq -4 \longrightarrow$ قرینه نسبت به نیمساز اول رسم یعنی $f^{-1}(x)$ $\xrightarrow[\text{انتقال}]{\text{۴ واحد به چپ}} f^{-1}(x+4) = g(x)$

$g(x) = f^{-1}(x+4) = x - 3 \longrightarrow f(x-3) = x+4 \longrightarrow -x + 3 + \sqrt{x+1} = x+4$

$\sqrt{x+1} = 2x+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+1 = 4x^2 + 1 + 4x \rightarrow 4x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(4x+3) = 0$ ، $x = 0$ ، $x = -\frac{3}{4}$

$x \geq -3 \longrightarrow D_f \geq -3 \Rightarrow R_{f^{-1}} \geq -3 \quad f^{-1}(x+4) = x - 3$

$\rightarrow x = 0 \quad f^{-1}(4) = -3$ ✓ ، $x = -\frac{3}{4} \rightarrow f^{-1}(4 - \frac{3}{4}) = -3 - \frac{3}{4}$ ✗ $\rightarrow$ ۱ برخورد دارد

۱۰

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \longrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$

$\rightarrow f\circ f(x) = f^{-1}\circ f(x) \longrightarrow D_{f\circ f} = D_f = x \geq 0$

$\longrightarrow f\circ f(x) = x \quad x \geq 0$