« به نام خدا »

کیوان مکارم نسب

تکلیف شماره ۱۵

①

$x=0 \to y=\tan(\frac{\pi}{۴})=۱ \to B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{\pi}{۴}\end{bmatrix}$

① می‌دانیم $\tan\alpha \to \alpha \neq \frac{\pi}{۲} \to -۲x+\frac{\pi}{۴} \neq {}^{۲}\frac{\pi}{۲} \to ۲x \neq -\frac{\pi}{۴} \to x \neq -\frac{\pi}{۸}$

$\to A=\begin{bmatrix}-\frac{\pi}{۸}\\ 0\end{bmatrix}$, $-۲x+\frac{\pi}{۴} \neq -\frac{۲\pi}{۴} \to ۲x \neq \frac{۳\pi}{۴} \to x \neq \frac{۳\pi}{۸}$

$\to C=\begin{bmatrix}\frac{۳\pi}{۸}\\ 0\end{bmatrix} \to \overline{AC}=\frac{۳\pi}{۸}-(-\frac{\pi}{۸})=\frac{۴\pi}{۸}=\frac{\pi}{۲}$, $\overline{OB}=\text{ارتفاع مثلث}=\frac{\pi}{۴}$

$\to S_{ABC}^{\Delta}=\frac{۱}{۲}AC \times OB=\frac{۱}{۲}\times\frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۴}=\boxed{\frac{\pi^۲}{۱۶}}$ ✓

②

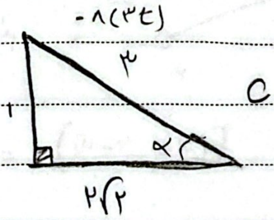
می‌دانیم: $۱-\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha \to x^۲-(\sin\alpha)x-\frac{۱}{۴}(۱-\sin^۲\alpha)=0$

$\to x=\frac{۲}{۳} \to \frac{۴}{۹}-\frac{۲}{۳}\sin\alpha-\frac{۱}{۴}(۱-\sin^۲\alpha)=0 \to \frac{۴}{۹}-\frac{۲}{۳}\sin\alpha-\frac{۱}{۴}+\frac{\sin^۲\alpha}{۴}=0$

$\xrightarrow{\times ۳۶} ۱۶-۲۴\sin\alpha-۹+۹\sin^۲\alpha=0 \xrightarrow{\sin\alpha=t} ۹t^۲\underbrace{-۲۴t}_{-۸(۳t)}+۷=0$

$\to (۳t-۱)(۳t-۷)=0 \xrightarrow{-۱\leq\sin\alpha\leq۱} \sin\alpha=\frac{۷}{۳}$ غیرقابل قبول

$\sin\alpha=\frac{۱}{۳}$ قابل قبول $\to$



$\cos\alpha=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

$\to ۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=\frac{۱}{\frac{۸}{۹}}=\boxed{\frac{۹}{۸}}$ ✓

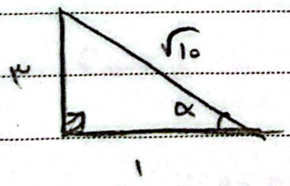
③

$\log^{(\sin\alpha)}-\log^{(-\cos\alpha)}=\log^{۳} \xrightarrow[\text{لگاریتم}]{\text{ویژگی}} \log^{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\log^{۳}$

$\xrightarrow[\text{از ۱ است}]{\text{پایه لگاریتم بزرگتر}} -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=۳ \to \tan\alpha=-۳$

(با توجه به اینکه دامنه لگاریتم از ۰ تا مثبت بی‌نهایت است، $\sin\alpha>0$ و $-\cos>0$، در نتیجه $\cos\alpha<0$ است).

← طبق توضیحات زاویه α در ناحیه دوم است.



$\to \sin\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$, $\cos\alpha=-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$

$\to \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}-(-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}})=\frac{۴}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۴\sqrt{۱۰}}{۱۰}=\boxed{\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵}}$ ✓

④

$\sin^۲\theta = ۱-\cos^۲\theta \longrightarrow (\sin^۲\theta)^۲ + \cos^۲\alpha = \frac{۴}{۵}$

$\longrightarrow (۱-\cos^۲\theta)^۲ + \cos^۲\theta = \frac{۴}{۵} \longrightarrow \cos^۴\theta - ۲\cos^۲\theta + ۱ + \cos^۲\theta = \frac{۴}{۵}$

$\xrightarrow{\cos\theta = t} t^۴ - t^۲ + ۱ = \frac{۴}{۵} \xrightarrow{\times ۵} ۵t^۴ - ۵t^۲ + ۵ = ۴$

$\rightsquigarrow ۵t^۴ - ۵t^۲ + ۱ = ۰ \longrightarrow t^۲ = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵-۲۰}}{۱۰} \longrightarrow t^۲ = \frac{۵ \pm \sqrt{۵}}{۱۰}$

$\longrightarrow t_۱^۲ = \frac{۵-\sqrt{۵}}{۱۰} \xrightarrow{①} \cos^۴\theta + \sin^۲\theta = (\cos^۲\theta)^۲ + ۱ - \cos^۲\theta = ?$

$\longrightarrow t_۲^۲ = \frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰} \xrightarrow{②} \cos^۴\theta + \sin^۲\theta = (\cos^۲\theta)^۲ + ۱ - \cos^۲\theta = ?$

① $\rightsquigarrow \left(\frac{۵-\sqrt{۵}}{۱۰}\right)^۲ + ۱ - \frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰} = \frac{۳۰-۱۰\sqrt{۵}}{۱۰۰} + ۱ - \frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰} = \frac{۳-\sqrt{۵}}{۱۰} + \frac{۵-\sqrt{۵}}{۱۰} + ۱$

$= \frac{۸-۲\sqrt{۵}}{۱۰} + ۱ = \frac{۴-\sqrt{۵}}{۵} + \frac{۵}{۵} = \frac{۹-\sqrt{۵}}{۵}$ ✓

② $\left(\frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰}\right)^۲ + ۱ - \frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰} = \frac{۳۰+۱۰\sqrt{۵}}{۱۰۰} + ۱ + \frac{-۵-\sqrt{۵}}{۱۰} = \frac{۳+\cancel{\sqrt{۵}}}{۱۰} + \frac{\cancel{-\sqrt{۵}}-۵}{۱۰} + ۱$

$\frac{-۲}{۱۰} + ۱ = ۱ - \frac{۱}{۵} = \boxed{\frac{۴}{۵}}$ ✓

مثبت

همواره

⑤

$\frac{\sin x(۳+\cos x)}{۲(۱-\cos^۲x)} < ۰ \longrightarrow \frac{\sin x(۳+\cos x)}{۲\sin^۲x} < ۰ \rightsquigarrow \frac{\boxed{۳+\cos x}}{۲\sin x} < ۰$

$\longrightarrow \sin x < ۰$ ① , $\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{۱}{\cos x} > ۰ \longrightarrow \frac{\sin^۲x - ۱}{\cos x} > ۰$

$\frac{-\cos^۲x}{\cos x} > ۰ \longrightarrow -\cos x > ۰ \longrightarrow \cos x < ۰$ ②

①،② $\rightsquigarrow$ ناحیه سوم ✓

⑥

$\frac{۲}{\sin x} = \frac{-۳}{\cos x} \longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{۲}{۳} = \tan x$

$\rightsquigarrow \cot x = -\frac{۳}{۲} \longrightarrow \tan x + \cot x = -\frac{۲}{۳} - \frac{۳}{۲} = \frac{-۴-۹}{۶} = \boxed{\frac{-۱۳}{۶}}$ ✓

⑦

$\frac{\sqrt{۱+\cos ۴۰}}{\cos ۴۰ + \cos ۸۰} = \frac{\sqrt{۲\cos^۲ ۲۰}}{\cos ۴۰ + \cos ۸۰} = \sqrt{۲}\,\frac{\cos ۲۰}{\cos ۴۰ + \cos ۸۰} = \frac{\sqrt{۲}\,\cancel{\cos ۲۰}}{\cos ۴۰ \cancel{+ ۲\cos^۲ ۴۰ - ۱}}$

$(۲\cos ۴۰ - ۱)(\cancel{\cos ۴۰ + ۱})$

$۲\cos^۲ ۲۰$

$\longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲(\cos ۲۰)(۲\cos ۴۰ - ۱)} = \frac{\sqrt{۲}}{۲(\cos ۲۰)(۲(۲\cos^۲ ۲۰ - ۱) - ۱)} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\,\frac{۱}{۲(۴\cos^۳ ۲۰ - ۳\cos ۲۰)}$

$\cos ۳x = \cos ۶۰$ ✓

$\rightsquigarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲\cos ۶۰} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}$ ✓

⑧

داریم که: $۱-۲\sin^۲\alpha = \cos ۲\alpha$ ، $۲\cos^۲\alpha - ۱ = \cos ۲\alpha$ ، $\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} = \cos ۲\alpha$

$\Rightarrow (\cos ۱۰^\circ)(\cos ۲۰^\circ)(\cos ۴۰^\circ) = ?$ ، $۲\sin\alpha\cos\alpha = \sin ۲\alpha$

$\xrightarrow[۲\sin ۱۰^\circ]{\times ۲\sin ۱۰^\circ} \frac{(۲\sin ۱۰^\circ \cos ۱۰^\circ)(\cos ۲۰^\circ)(\cos ۴۰^\circ)}{۲\sin ۱۰^\circ} = \times ۲\,\frac{\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ}{۲\times ۲\sin ۱۰^\circ} = \frac{\sin ۴۰^\circ \cos ۴۰^\circ}{۴\sin ۱۰^\circ}$

$\xrightarrow[\times ۲]{\times ۲} \frac{۲\sin ۴۰^\circ \cos ۴۰^\circ}{۸\sin ۱۰^\circ} = \frac{\sin ۸۰^\circ}{۸\sin ۱۰^\circ} \xrightarrow{\sin ۸۰^\circ = \cos ۱۰^\circ} \frac{۱}{۸}\,\frac{\cos ۱۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ} = \boxed{\frac{۱}{۸}\cot ۱۰^\circ}$ ✓

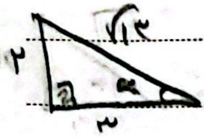
⑨

$\sin\alpha + ۳\cos\alpha = ۲ \xrightarrow[۲]{\text{توان}} \sin^۲\alpha + ۹\cos^۲\alpha + ۶\sin\alpha\cos\alpha = ۴$

$\xrightarrow{\div \sin^۲\alpha} ۱ + ۹\cot^۲\alpha + ۶\cot\alpha = \frac{۴}{\underset{(۱+\cot^۲\alpha)}{\cancel{\sin^۲\alpha}}} \xrightarrow{\cot\alpha = t} ۱+۹t^۲+۶t = ۴(۱+t^۲)$

$۹t^۲+۶t+۱ = ۴+۴t^۲ \longrightarrow ۵t^۲+۶t-۳ = ۰ \longrightarrow t = \frac{-۶\pm\overset{۹}{\cancel{\sqrt{۳۶+۴۵}}}}{۱۰}$

$\rightarrow \cot\alpha = \frac{۳}{۱۰}$ ، $\cot\alpha = -\frac{۱۵}{۱۰} = -\frac{۳}{۲}$



$\rightarrow \cos ۲\alpha = ۲\left(\frac{۹}{۱۳}\right) - \frac{۱۳}{۱۳} = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow ۵\left(\frac{۵}{۱۳}\right) - ۱۲\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\right) = \frac{۲۵}{۱۳} - \frac{۳۶}{\sqrt{۱۳}}$ ✓

$\rightarrow \frac{۲۵-۳۶\sqrt{۱۳}}{۱۳}$ ✓

۱۰

$\underset{۷۲^\circ}{\cancel{\hat B}} + \hat C + \hat A = ۱۸۰^\circ \longrightarrow \hat A + \hat C = ۱۰۸^\circ \longrightarrow \underset{\sin ۱۰۸}{\cancel{\sin ۷۲}}\ \sin(۱۰۸-\hat A) = \frac{۱+\cos A}{۲}$

$(\sin ۱۰۸)(\sin ۱۰۸\cos A - \cos ۱۰۸\sin A) = \frac{۱+\cos A}{۲}$

$\sin^۲ ۱۰۸^\circ \cos A - \frac{۱}{۲}\sin ۲۱۶\,\sin A = \frac{۱+\cos A}{۲}$