تایم رفع اشکال بگیرید! ۱۱/۵

نام و نام خانوادگی ......[illegible]...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره .... کلاس ......B......

۱

$۸\cos x = ۱ + \cancel{\tan^۲ x}\ \frac{۱}{\cos^۲ x}$

$۸\cos^۳ x = ۱ \rightarrow \cos^۳ x = \frac{۱}{۸} \rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۱/۵

در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ ۲ جواب $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$ را دارد!

۲

$۵\sin^۲ x + ۲(۴\cos^۳ x - ۳\cos x) + ۲ = ۵$

$۵(۱ - \cos^۲ x) + ۸\cos^۳ x - ۶\cos x + ۲ = ۰$

$۸\cos^۳ x - ۵\cos^۲ x - ۶\cos x + ۷ = ۰$

$\cos x = \cancel{X}$

$(\cos x + ۱)(۸\cos^۲ x - ۱۳\cos x + ۷) = ۰$ ✓

$\Delta < ۰$ جواب ندارد

$\cos x = -۱$ جواب است

$\begin{cases}\cos x = ۱ \\ \cancel{\cos x = -۱}\end{cases}$ ← را امتحان کنیم

$\cos x = -۱$ $\quad x = ۲k\pi + \pi$

$k = -۱$

$\{\pi, -\pi\}$

۲

۳

$۲\sin x(۱ - ۲\sin^۲ x) + \sin x = ۱$

$۲\sin x - ۴\sin^۳ x + \sin x = ۱$ مجموع جواب‌ها؟

$۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۱$

$\sin(۳x) = ۱ \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$ ✓

$k = ۰ \rightarrow x = \pi/۶$

$k = ۱ \rightarrow x = \frac{۵\pi}{۶}$

$k = ۲ = \frac{۹\pi}{۶} = \frac{۳\pi}{۲}$

$k = ۳ =$ غ‌ق‌ق

$\frac{\pi}{۶} + \frac{۵\pi}{۶} + \frac{۳\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۲}$

۱/۵

۴

$\frac{۱}{\cos ۲x} + \frac{-۱}{۲\sin ۲x\cos ۲x} = ۰$

$\sin(۲x + \frac{\pi}{۲}) + \cancel{\cos(۴x + \frac{\pi}{۲})}$

$- \sin ۴x$

$\rightarrow \frac{۲\sin ۲x - ۱}{۲\sin ۲x\cos ۲x}$

$۲\sin ۲x - ۱ = ۰$

$\rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲}$

$۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$

۱

۵

$\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x) = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$

$\rightarrow (\cos x - \sin x)^۲ = (\frac{۲}{\sqrt{۶}})^۲ \rightarrow ۱ - \sin ۲x = \frac{۲}{۳} \rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۳}$

$m \times \frac{۲}{\sqrt{۶}} - ۳\sqrt{۶} \times \frac{۱}{۳} = \sqrt{۶}$

$\rightarrow \boxed{m = ۶}$ ✓

۲

۶	$\cos(x+\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۲})=\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ $۲\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱$ $\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱/۲$ $x+\frac{\pi}{۴}\neq ۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \rightarrow x=۲k\pi$ $= ۲k+۵\frac{\pi}{۴} \rightarrow x=۲k+\frac{۱\pi}{۴}$ ۱,۵
۷	۰
۸	$۲\sin x \underbrace{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)}_{-\cos x}=۱ \rightarrow -۲\sin\cos x=۱$ $-۲\sin۲x=۱$ $\rightarrow \sin۲x=-۱/۲$ $۲x=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۶} \rightarrow x=k\pi-\frac{۵\pi}{۱۲}$ $x=\frac{۱۱\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲}, \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۹\pi}{۱۲}=۵\pi \quad =۲k\pi-\frac{\pi}{۶} \rightarrow k\pi-\frac{\pi}{۱۲}$ ۲
۹	۰
۱۰	۰

④

$$\begin{cases}\sin(۲x+\frac{\pi}{۲}) = \cos ۲x \\ \cos(\frac{\pi}{۲}+۴x) = -\sin ۴x\end{cases} \rightarrow \frac{۱}{\cos ۲x} + \frac{۱}{-\sin ۴x} = ۰ \rightarrow \frac{\cos ۲x - \sin ۴x}{\cos ۲x(-\sin ۴x)} = ۰$$

$$\cos ۲x - ۲\sin ۲x \cos ۲x = ۰ \longrightarrow \cos ۲x(۱-۲\sin ۲x) = ۰$$

$$\rightarrow \cos ۲x = ۰ \; ✗$$

$$\rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲} \; ✓$$

* اگر $\cos ۲x = ۰$ باشد مخرج عبارت اولیه صفر می‌شود که غیر قابل قبول است!

$$\sin ۲x = \frac{۱}{۲} \rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \;\underline{\text{یا}}\; ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \;\underline{\text{یا}}\; k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{۰ \leq x \leq \pi} k = ۰ \longrightarrow x = \frac{\pi}{۱۲} \;\underline{\text{یا}}\; \frac{۵\pi}{۱۲} \longrightarrow \frac{۵\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۳}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{۳} \longrightarrow \tan(۲\alpha) = \tan(\frac{۲\pi}{۳}) = \boxed{-\sqrt{۳}}$$

---

⑥

$$\cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\frac{\pi}{۳} - x)$$

$$\frac{\pi}{۳} - x + x + \frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۲} \longrightarrow \cos(\frac{\pi}{۳} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{۶})$$

$$\sin^۲(x+\frac{\pi}{۶}) = ۱ \longrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶}) = \pm ۱ \longrightarrow x + \frac{\pi}{۶} = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{۰ \leq x \leq ۲\pi} k=۰ \rightarrow x = \frac{\pi}{۳} \;,\; k=۱ \;,\; x = \frac{۴\pi}{۳}$$

معادله ۲ جواب در بازه دارد

---

⑦ عبارت را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ \sin x + \sin ۶۰^\circ \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \longrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{-\pi \leq x \leq ۲\pi} k=۰,۱ \rightarrow x = -\frac{\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲} \\ x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \xrightarrow{-\pi \leq x \leq ۲\pi} k=۰ \rightarrow x = \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

$$S = \frac{۲۳\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۱۲} + \frac{۵\pi}{۱۲} = \frac{۲۷\pi}{۱۲} = \boxed{\frac{۹\pi}{۴}}$$

⑧

$\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = -\cos x$

$۴\sin x(-\cos x) = ۱ \longrightarrow -۲(۲\sin x\cos x) = ۱ \longrightarrow \sin ۲x = -\frac{۱}{۲}$

$۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}$ یا $۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \longrightarrow x = \overset{2}{k\pi - \frac{\pi}{۱۲}}$ یا $\overset{1}{k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}}$

$$۰ \le x \le ۲\pi \longrightarrow \begin{cases} \overset{1}{} \; k = ۰, ۱ \longrightarrow x = \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۹\pi}{۱۲} \\ \underset{2}{} \; k = ۱, ۲ \longrightarrow x = \frac{۱۱\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲} \end{cases}$$

$S = \frac{۷\pi}{۱۲} + \frac{۱۹\pi}{۱۲} + \frac{۱۱\pi}{۱۲} + \frac{۲۳\pi}{۱۲} = \frac{۶۰\pi}{۱۲} = \boxed{۵\pi}$

---

⑩

$\tan ۳x = \frac{۱}{\tan x} = \cot x \longrightarrow \tan ۳x = \tan(\frac{\pi}{۲} - x)$

$۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \longrightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

k	۴	۵	۶	۷
x	$\frac{۹\pi}{۸}$	$\frac{۱۱\pi}{۸}$	$\frac{۱۳\pi}{۸}$	$\frac{۱۵\pi}{۸}$

$S = (\frac{۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵}{۸})\pi = \frac{۴۸\pi}{۸} = \boxed{۶\pi}$

⑨

$۱ + \cos ۲\bigstar = ۲\cos^۲\bigstar$

$$\left.\begin{cases} ۱+\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha \\ ۱+\cos ۴\alpha = ۲\cos^۲ ۲\alpha \\ ۱+\cos ۸\alpha = ۲\cos^۲ ۴\alpha \end{cases}\right\} \rightarrow ۸\cos^۲\alpha\,\cos^۲ ۲\alpha\,\cos^۲ ۴\alpha = \frac{۱}{۸}$$

$$\cos^۲\alpha\,\cos^۲ ۲\alpha\,\cos^۲ ۴\alpha = \frac{۱}{۶۴} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \cos\alpha\,\cos ۲\alpha\,\cos ۴\alpha = \frac{\pm ۱}{۸} \xrightarrow[\sin\alpha \neq ۰]{\times \sin\alpha \ \bigstar}$$

$$\underbrace{(\sin\alpha\cos\alpha)}_{\sin ۲\alpha}\cos ۲\alpha\cos ۴\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{۸} \rightarrow \frac{۱}{۲}\underbrace{(\sin ۲\alpha\,\cos ۲\alpha)}_{\frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha}\cos ۴\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{۸}$$

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\underbrace{(\sin ۴\alpha\,\cos ۴\alpha)}_{\sin ۸\alpha} = \frac{\pm\sin\alpha}{۸} \rightarrow \frac{۱}{\cancel{۸}}\sin ۸\alpha = \frac{\pm\sin\alpha}{\cancel{۸}}$$

$$\sin ۸\alpha = \pm\sin\alpha \rightarrow \begin{cases} ۸\alpha = ۲k\pi+\alpha \ \underline{\text{یا}}\ ۲k\pi+\pi-\alpha \\ ۸\alpha = ۲k\pi-\alpha \ \underline{\text{یا}}\ ۲k\pi+\pi+\alpha \end{cases}$$

$\alpha = \frac{۲k\pi}{۷} \xrightarrow{\text{MAx}\,A} k=۳ \rightarrow x = \frac{۶\pi}{۷}$

$\alpha = \frac{۲k\pi}{۹} \xrightarrow{\text{MAx}\,A} k=۴ \rightarrow x = \frac{۸\pi}{۹}$

$\alpha = \frac{(۲k+۱)\pi}{۷} \xrightarrow{\text{MAx}\,A} k=۲ \rightarrow x = \frac{۵\pi}{۷}$

$\alpha = \frac{(۲k+۱)\pi}{۹} \xrightarrow{\text{MAx}\,A} k=۳ \rightarrow x = \frac{۷\pi}{۹}$

$\rightarrow \boxed{\text{MAx}\,A = \frac{۸\pi}{۹}}$

★ A نمی‌تواند برابر خود π باشد چون طبق ★ sinα را مخالف صفر در نظر گرفته‌ایم!