به نام خدا

سامان نژادکرد

دوازدهم [illegible] B

تکلیف ۱۹

۱ـ

$f(x)=2\left[\frac{2-x}{2}\right]+a\left[\frac{x+2}{3}\right]$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)\neq \pm\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=2\left[\frac{2-(-2^-)}{2}\right]+a\left[\frac{(-2^-)+2}{3}\right]$

$=2\times 2+a(-1)=4-a$ II

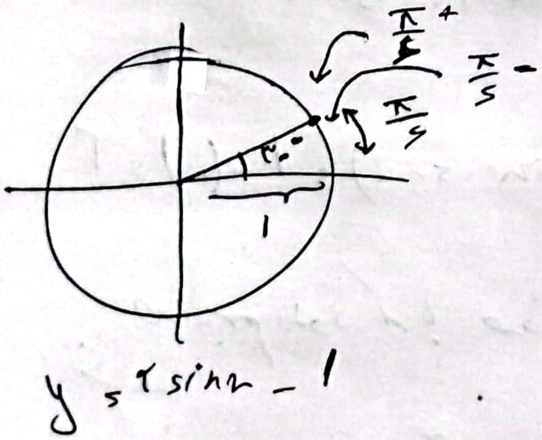
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=2\left[\frac{2-(-2^+)}{2}\right]+a\left[\frac{-2^++2}{3}\right]$

$=2\times 1+a\times 0=2$ I

$\overset{I,II}{\Longrightarrow} 4-a=2\Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \left[\frac{a}{3}\right]=\left[\frac{2}{3}\right]=0$

۲ـ

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=-1$

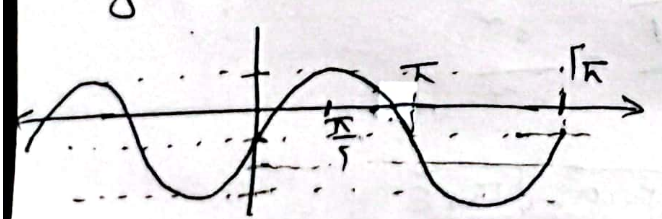



$x\to \frac{\pi}{6}^+ \Rightarrow \sin x<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\sin x<1 \Rightarrow 2\sin x-1<0$

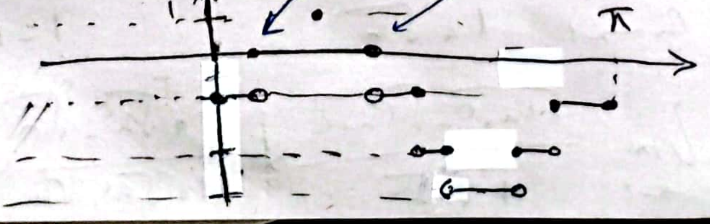
$\Rightarrow [2\sin x-1]=-1$

$y=2\sin x-1$




از روی نمودار هم میتوان فهمید

$y=[2\sin x-1]$



۳-

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} [8x^2 - x] = [8(-\tfrac{1}{2})^2 - (-\tfrac{1}{2})]$$

$$= [8(\tfrac{-1}{8}) + \tfrac{1}{2}] = [-1 + \tfrac{1}{2}] = [-\tfrac{1}{2}] = -1$$

چون داخل براکت عدد صحیح نشد نیازی به بررسی حد چپ و راست نبود

۴-

$$\lim_{x\to (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]}$$

ابتدا حاصل براکت ها را بدست می آوریم

$$x < -\tfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 > \tfrac{1}{4} \Rightarrow \tfrac{1}{x^2} < 4 \Rightarrow \tfrac{3}{x^2} < 12$$

$$\Rightarrow [\tfrac{3}{x^2}] = 11$$

$$x < -\tfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 > \tfrac{1}{4} \Rightarrow \tfrac{1}{x^2} < 4 \Rightarrow \tfrac{-2}{x^2} > -8 \Rightarrow [\tfrac{-2}{x^2}] = -8$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-} \frac{10x + 6}{16x + 8} = \frac{-5 + 6}{-8^- + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۵-

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \overbrace{\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{1 + \cos \pi x}}^{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(1 + \cos \pi x)}(1 - \cos \pi x)}{\cancel{1 + \cos \pi x}} = \lim_{x\to 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - (-1) = 2$$

حد مبهم بود که با حذف عامل صفر کننده رفع ابهام شد

۶-

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}} \times \frac{1 + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}} \times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-x-1}{x+1} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{2} = -1 \times 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 7\sqrt{x} + 4}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{3-7+4}{2-2} = \frac{0}{0}$$ -۷

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 7\sqrt{x} + 4}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}} = \frac{3x - 7\sqrt{x} + 4}{4x^2 - 3x - 1} \times 4$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(3\sqrt{x}-4)}{(\cancel{x-1})(4x+1)} \times 4 = \lim_{x \to 1} \frac{4 \times (3\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+1)(4x+1)}$$

$\sqrt{x}+1$

$$= \frac{4 \times (-3)}{2 \times 5} = \frac{-12}{10} = -1/2$$

۸ - با توجه به اینکه حد برابر $\frac{1}{4}$ شده و حاصل
$$\lim_{x \to 0} \frac{a + \sqrt{bx+c}}{x} = \frac{1}{4}$$

حد عدد حقیقی است پس حد $\frac{0}{0}$ بوده پس حد صورت هم باید $0$ باشد

$$\lim_{x \to 0} (a + \sqrt{bx+c}) = a + \sqrt{c} = 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{c} = -a} \quad I$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a + \sqrt{bx+c}}{x} \overset{\text{HoP}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{b}{2\sqrt{bx+c}}}{1} = \frac{b}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c} = 2b = -a \Rightarrow ab = -\sqrt{c} \times \frac{\sqrt{c}}{2} = -\frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{-c/2}{c} = -\frac{1}{2}$$

-۹

$$\lim_{x \to -2\pi} \frac{4 + k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x}$$

$$\lim_{x \to -2\pi^+} \frac{4 + k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x} = \frac{4+(-2k)}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2\pi^-} \frac{4 + k[\frac{x}{\pi}]}{\sin x} = \frac{4+(-3k)}{0^-} = +\infty$$

$\Rightarrow$ با توجه به صورت حاصل ۴ دارد: $4 - 2k > 0 \Rightarrow k < 2$ ، $4 - 3k < 0 \Rightarrow k > \frac{4}{3}$ $\Big| \; -2 < -k < -\frac{4}{3} \Rightarrow [-k]$

۱-

$$\lim_{x\to 8}\frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2b}{ax-b}=\frac{2b-2b}{8a-b}=\frac{0}{8a-b}\neq 0$$

پس باید $8a-b=0$ باشد تا رفع ابهام کنیم : I $\quad 8a-b=0\Rightarrow \underline{8a=b}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{8a\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-16a}{ax-8a}=\frac{8\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-16}{x-8}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{8\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-16}{x-8}\overset{H.P}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 8}\frac{\dfrac{8\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{(2+\sqrt[3]{x})}}}{1}$$

$$=\frac{8\times\frac{1}{3\times 4}}{2\times 2}=\frac{\frac{2}{3}}{4}=\frac{1}{6}$$