ماهان نژاد اکبر

تکلیف ۲.

۱۲_B

۱۹,۵ آفرین

۱_ $\lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{x^2+ax+b} = -\infty$

چون حاصل حد نامتناهی شده، پس مخرج وقتی ۲ → x → ۰ میل می‌کند و ریشه‌های آن مخالف اند زیرا که حد از دو طرف برابر بوده، تغییر علامت نداده اند:

$(x^2+ax+b) = k(x-2)^2 = k(x^2-4x+4) \Rightarrow k=1,\ a=-4,\ b=4$ ۲

$\lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{x^2-4x+4} = \frac{2x-5}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ $\quad a+b = -4+4 = 0$

۲_ $\lim_{x\to \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2+ax+b} = +\infty$ $\begin{cases} \lim_{x\to(\sqrt[3]{4})^+} x^2+ax+b = 0^+ \\ \lim_{x\to(\sqrt[3]{4})^-} x^2+ax+b = 0^+ \end{cases}$ ۱,۵

$\Rightarrow x^2+ax+b = (x-\sqrt[3]{4})^2 = x^2+\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{4}x \Rightarrow \begin{cases} a=-\sqrt[3]{32} \\ b=\sqrt[3]{16} \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{32}}\right] = \left[-\sqrt[3]{\frac{4}{8}}\right] \overset{I}{=} -1$ $\quad x^2-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}$

$\boxed{1<\frac{4}{2}<8 \Rightarrow 1<\sqrt[3]{\frac{4}{2}}<2 \Rightarrow -1>-\sqrt[3]{\frac{4}{2}}>-2}$ $\quad b=2^{\frac{4}{3}}$

$a=-(2\times 2^{\frac{2}{3}}) = -(2^{\frac{5}{3}})$

$\frac{b}{a} = -(2^{\frac{4}{3}-\frac{5}{3}}) = -(2^{-\frac{1}{3}}) = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}$ x

$[x]=-1$

۲

$\lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt{2}})^+} \frac{[-x]+a}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}x+a\right|+a} = -\infty$

$x>\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow [-x]=-1$

$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{1}{\sqrt{2}})^+} \frac{a-1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}x+a\right|+a} = -\infty$ $\begin{cases} \frac{a-1}{-\frac{1}{2}} = -\infty \quad a<-\frac{1}{2} \\ \lim \frac{a-1}{2a+\frac{\sqrt{2}}{2}x} = -\infty \quad a>-\frac{1}{2} \end{cases}$ غ ق ق

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\sqrt{2}}{2}^{+}} \left(2x + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow [a] + \left[-\frac{1}{4}\right] = -1$$

-4

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^{+}} \frac{16x - \left[-\frac{3}{x^2}\right]}{24x + \left[\frac{3}{x^2}\right]} = \frac{16x-(-9)}{24x+12}$$

$$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 4 \quad \begin{cases} \frac{3}{x^2} > 12 \Rightarrow \left[\frac{3}{x^2}\right] = 12 \\ -\frac{3}{x^2} < -12 \Rightarrow \left[-\frac{3}{x^2}\right] = -9 \end{cases}$$

2

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^{+}} \frac{16x+9}{24x+12} = \frac{-8+9}{0^{+}} = +\infty$$

$$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 24x > -12 \Rightarrow 24x + 12 > 0$$

-5

$$\lim_{x\to 2^{+}} \frac{x^2-4}{x^3-[x^3]} = \frac{x^2-4}{x^3-8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x > 2 \Rightarrow x^3 > 8 \Rightarrow \boxed{[x^3] = 8}$$

-6

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} = \frac{(x+8)(x+2)}{6(\sqrt[3]{x}+2)} = \frac{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}+4-2\sqrt[3]{x})(x+2)}{6(\sqrt[3]{x}+2)}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x^2}+4-2\sqrt[3]{x})(x+2)}{6} = \frac{(4+4+4)(-6)}{6} = \frac{12\times(-6)}{6} = 12$$

2

-7

$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{۴x}{\sqrt{۱-\cos^۲ x}} \times \frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۱+x^۲}+\sqrt{۱-x}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۴x}{|\sin x|} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}$$

$$x<۰ \Rightarrow \sin x<۰ \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$$

$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{۴x}{-\sin x} \times \frac{۱}{۲} = -۴\times\frac{۱}{۲} = -۲$$

۲

-۸

$$\lim_{x\to ۰} \frac{k+\cos(\sqrt{a}\,x)}{kx^۲} = \frac{k+(۱-\frac{ax^۲}{۲})}{kx^۲} = \frac{k+۱-\frac{ax^۲}{۲}}{kx^۲} = ۳$$

۲

$$\overset{\text{hop}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to ۰} \frac{-ax}{۲kx} = \frac{-a}{۲k} = ۳ \Rightarrow \frac{a}{k} = -۶$$

-۹

$$\lim_{x\to (۴a)^+} \frac{۲\sqrt{x-۴a}+۳\sqrt{x}-\sqrt{۳۶a}}{\sqrt{x^۲-۱۶a^۲}} = \frac{۲\sqrt{x-۴a}}{\sqrt{x^۲-۱۶a^۲}} + \frac{۳(\sqrt{x}-\sqrt{۴a})}{\sqrt{x^۲-۱۶a^۲}}$$

$$= \frac{۲}{\sqrt{x+۴a}} + \frac{۳(\sqrt{x}-\sqrt{۴a})}{\sqrt{x^۲-۱۶a^۲}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{۴a}}{\sqrt{x}+\sqrt{۴a}} = \frac{۲}{\sqrt{۸a}} + \frac{۳(\sqrt{x-۴a})}{\sqrt{x+۴a}}$$

۲

$$= \boxed{\frac{۲}{\sqrt{۸a}}}$$

-۱۰

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۱-k[x]}{x^۲-۱} = \begin{cases} \lim_{x\to -۱^+} \frac{۱+k}{x^۲-۱} = -\infty \\ \lim_{x\to -۱^-} \frac{۱+۲k}{x^۲-۱} = -\infty \end{cases}$$

۲

$$\Rightarrow \frac{۱+k}{۰^-} = -\infty \Rightarrow ۱+k>۰ \Rightarrow k>-۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱+۲k}{۰^+} = -\infty \Rightarrow ۱+۲k<۰ \Rightarrow k<-\frac{۱}{۲}$$

$$\Big\} \quad -۱<k<-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -\pi<k\pi<-\frac{\pi}{۲} \Rightarrow [\text{illegible}] \quad \cos(-\pi) < \cos k\pi < \cos(-\frac{\pi}{۲})$$

$$-۱<\cos k\pi<۰$$

۲

هنگامی که x به $\sqrt[3]{4}$ میل می‌کند صورت مثبت است بنابراین مخرج باید به صفر مثبت میل کند!

بنابراین $x=\sqrt[3]{4}$ ریشه‌ی مضاعف مخرج است!

$$(x-\sqrt[3]{4})^2 = x^2 - 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16} \Rightarrow a = -2\sqrt[3]{4} \text{ یا } -\sqrt[3]{32}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt[3]{16}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{-2\times 2^{\frac{2}{3}}} = (-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \xrightarrow{\sqrt[3]{2}\simeq 1} \boxed{\left[\frac{b}{a}\right] = -1}$$