۱۷,۵

Year...... Month...... Day......　　　　　　Subject:......

مهرزاد طاها

کیوان کشاورز منتظر　　　　　　　　　　　　تکلیف شماره ۲۱

۱) ریشه‌ی: $6x^2+(m+3)x+\frac{m}{2}=0$ ، a (1) مخرج را صفر می‌کند → $x\neq a$

$\Delta\leq 0 \to m^2+6m+9-12m\leq 0 \longrightarrow m^2-6m+9\leq 0 \longrightarrow (m-3)^2\leq 0$

$\to \boxed{m=3}$ $\xrightarrow{(1)}$ $2x^3+a^2=0 \xrightarrow{x=a} 2a^3+a^2=0 \longrightarrow a=0$ ✗ چون مخرج را صفر می‌کند

$\boxed{a=-\frac{1}{2}}$ ✓

۲

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{6x^2+6x+\frac{3}{2}}}{|2x^3+\frac{1}{4}|} & x\neq -\frac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{2\tan b}{\sqrt{-x}} & x=-\frac{1}{2}\end{cases} \to \begin{cases}\dfrac{\sqrt{6}\,|x+\frac{1}{2}|}{|2x^3+\frac{1}{4}|} & x\neq -\frac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{2\tan b}{\sqrt{-x}} & x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{3} \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}\,\cancel{|x+\frac{1}{2}|}}{2\,\cancel{|x+\frac{1}{2}|}\,|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{6}}{2|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{6}}{2(\frac{3}{4})}=\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2\tan b\times\sqrt{2}}{1}$$

$$\to \frac{\sqrt{6}}{3}=\tan b\times\sqrt{2} \longrightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}\times 3}=\tan b \longrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan b$$

$0<b<\pi$

$\boxed{b=\frac{\pi}{6}}$ ✓

---

۲) چون حد تابع موجود بود و در آن پیوسته نیست، پس باید حد تابع را در ریشه مخرج حساب می‌کنیم (یعنی در نقطه $x=1$، تابع توخالی است) سمت

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\frac{0}{0} \to 1+a+b=0 \longrightarrow a+b=-1$ (1) ، $5 \longrightarrow a+b=0$

$\longrightarrow b-a=-5$ (2) ، $\underline{(1),(2)}$ $\begin{cases}a+b=-1\\ b-a=-5\end{cases} \longrightarrow b=-3$ ، $a=2$ $\longrightarrow \left[\frac{-3-4}{3}\right]$

$=\left[-\frac{7}{3}\right]=-3$ ✓

---

۳) $\lim_{x\to1^+}\frac{|x+2|\,\cancel{|x-1|}}{\cancel{(1-x)}\,(a)}=-\frac{3}{a}$ ، $\lim_{x\to1^-}$ [illegible] $=-1 \to -1=-\frac{3}{a} \to \cancel{a=3}$

$\lim_{x\to5^-}\frac{|x+2|}{a}=\frac{7}{a}$ ، $\lim_{x\to5^+} b(x-[-x])=-b \to \frac{7}{3}=-b \to b=-\frac{7}{3}$

۱,۷۵

$\to ab=-\frac{7}{3}\times 3=-7$ ✓

Year....... Month....... Day.......   Subject:

٤

$f(x) = a[x] + a + b[x] + b[a+1] \Rightarrow [x](a+b) + b[a+1]$

چون تابع پیوسته است ← $a+b=0 \Rightarrow a=-b$

$\Rightarrow f(a) = a[a] + a + a[a] - a[a] - a = -a[a]$

$\Rightarrow \dfrac{a[a]}{-a[a]} = -1$ ✓

۲

۵

$f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$ ؛ چون تابع پیوسته است، پس $b=0$ است :

$b=0$

$\Rightarrow f(b) = f(a) = -2a \Rightarrow \dfrac{a}{f(b)} = \dfrac{a}{-2a} = -\dfrac{1}{2}$ ✓

۲

۶

$f(2a) = 0 \Rightarrow \dfrac{4a^2 + 2am + n}{-a} = 0 \Rightarrow 4a^2 + 2am + n = 0$ ①

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 + mx + n}{a - x} = 2 \xrightarrow{Hop} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{2x + m}{-1} = 2 \Rightarrow 2a + m = -2$

۰/۵

۷

فرض $x \to 0^+ \Rightarrow (1-a)(0) + (3a^2 - 1)(-1) = -3a^2 + 1 \Rightarrow -3a^2 + 1 = a - 1$

$x \to 0^- \Rightarrow (1-a)(-1) + (3a^2 - 1)(0) = a - 1$

$\Rightarrow 3a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ یا $a = +\frac{2}{3}$

$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow -2 = b\sin(-\pi) \Rightarrow b = 0$ ✗ غیرقابل قبول

$\Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} = b\sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{3} = -b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$ ✓

۲

۸

$\lim$

$x \to 1^+ \Rightarrow \dfrac{x^2 + mx - m - 1}{mx^2 - m + x - 1}$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x^2 - mx + m + 1}{-mx^2 + m - x + 1}$ $\dfrac{-m-1}{+1-1+} \quad 1$

۱/۵

$\dfrac{m}{m+2} = \dfrac{x^2 + mx - m - 1}{mx^2 - m + x - 1} \Rightarrow m^2x^2 - m^2 + mx - m = mx^2 + m^2x - m^2 - m + 2x^2 + 2mx - 2m - 2$

$\Rightarrow m^2x^2 + mx - (m^2 + m) = (m+2)x^2 + (m^2 + 2m)x + (m^2 + 3m + 2) \Rightarrow m = -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1$ ✓

Year Month Day Subject

(۹) $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$ a ریشه مخرج و صورت است، زیرا نقطه ای ناپیوستگی است، پس داریم: 1.5

$\to \sqrt{3}\,|a^2+a| = 0 \to a=0$ ✗ , $a=-1$ ✓ مخرج $\to 1 + (m-2) - 1 + 1 = 0$

$\to m+2=0 \to m=2 \to \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{3}\,|x+1|}{|x^3+1|}$ تبدیل شکسته $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{3}}{|x^2-x+1|} =$

$\to \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ✓

---

(۱۰)

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x^2+ax} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x+1)}{x(x+a)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{a}$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x(x-1)}{x(x-a)} = \frac{1}{a}$

$\to \frac{2a-1}{2a+2} = \frac{1}{a}$

$\to 2a^2 - a = 2a+2 \to 2a^2 - 3a - 2 = 0 \to a = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$ $a=2$, $a=-\frac{1}{2}$

2

(1) $\lim_{x\to -2} \frac{4+2}{4-\frac{1}{2}(2)} = \frac{6}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$ ✓

(2) $\lim_{x\to +\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+2(\frac{1}{4})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$ ✓

۳ تابع در $x=1$ پیوستگی از راست و $x=5$ پیوستگی از چپ دارد!

$f(1) = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} = \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{-a\cancel{(1-x)}} = -1 \rightsquigarrow \frac{3}{a}=1 \rightsquigarrow a=3$$

$f(5) = b(5-[-5]) = 10b$

$$\lim_{x\to5^-} \frac{\overset{|25+5-2|}{|x^2+x-2|}}{\underset{3(-4)}{3(1-x)}} = -\frac{28}{12} = \frac{-7}{3}$$

$\rightsquigarrow b = \frac{-7}{30} \rightsquigarrow ab = -\frac{7}{30}\times 3 = \boxed{-0/7}$

۴

$f(2a)=0 \longrightarrow x=2a$ ریشه‌ی صورت ✓

$x=a \longrightarrow$ ریشه‌ی مخرج ✓ ، $f(a)=2$ نقطه‌ی پیوستگی ✓

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(x-2a)}{-\cancel{(x-a)}} = 2 \longrightarrow a=2$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+8}{-(x-2)}$$

$\to m=-4$

$\to n=8$

$\rightsquigarrow m-n=14$

۵

$x=a$ ریشه‌ی صورت $\rightsquigarrow a^2+a=0 \to a=0$ ✓ ، $a=-1$ ✗

$a^3+a(m-2)+a^2=0 \rightsquigarrow -1-m+2+1=0 \rightsquigarrow m=2$

$$\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt3|-x-1|}{|x^3+1|} = \frac{\sqrt3}{|x^2-x+1|} = \frac{\sqrt3}{3}$$

۸

$$\lim_{x\to1} \frac{|(x-1)(x+m+1)|}{m|(x-1)(x+1)|+|x-1|} = \frac{|x-1|(x+m+1)}{|x-1|(m|x+1|+1)} = \frac{|m+2|}{2m+1} = \frac{m}{m+2}$$

$m\geq-2 \rightsquigarrow m^2+4m+4 = 2m^2+m \to m=-1 \longrightarrow$ مخرج ریشه دارد نشود!

$$m=4 \to \frac{|x^2+4x-5|}{|x-1|(4|x+1|+1)} = \frac{5+\frac14}{4(\frac54)+1} = \frac{\frac{21}{4}}{6} = \frac78$$