تمرین حد

کیوان کرم منش — تکلیف شماره ۲۱

① $6x^2+(m+3)x+\frac{m}{2}=0$: داریم و ① a مخرج را صفر می‌کند ← $x \neq a$

$\Delta \le 0$ ← $m^2+6m+9-12m \le 0 \longrightarrow m^2-6m+9\le 0 \longrightarrow (m-3)^2 \le 0$

← $\boxed{m=3}$ ① ← $2x^3+a^2=0 \xrightarrow{x=a} 2a^3+a^2=0$ ← $a=0$ ✗ چون مخرج را صفر می‌کند

$\boxed{a=-\frac{1}{2}}$ ✓

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{6x^2+6x+\frac{3}{2}}}{|2x^3+\frac{1}{4}|} & x\neq -\frac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{2\tan b}{\sqrt{-x}} & x=-\frac{1}{2}\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\dfrac{\sqrt{6}\,|x+\frac{1}{2}|}{|2x^3+\frac{1}{4}|} & x\neq -\frac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{2\tan b}{\sqrt{-x}} & x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6}\,|x+\frac{1}{2}|}{2|x+\frac{1}{2}|\,|x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{6}}{2|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{6}}{2(\frac{3}{4})}=\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2\tan b\times\sqrt{2}}{1}$$

$$\to \frac{\sqrt{6}}{3}=\tan b\times\sqrt{2} \longrightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}\times 3}=\tan b \longrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan b$$

$0<b<\pi$

$\boxed{b=\frac{\pi}{6}}$

---

② چون حد تابع موجود بود و در آن پیوسته نیست، پس باید حد تابع را در ریشه مخرج حساب کنیم (یعنی در نقطه $x=1$، تابع توخالی است)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\frac{0}{0} \to 1+a+b=0 \to a+b=-1 \;①$$

$\to b-a=-5$ ②

$$①,② \begin{cases}a+b=-1\\ b-a=-5\end{cases} \longrightarrow \begin{matrix}b=-3\\ a=2\end{matrix} \longrightarrow \left[\frac{-3-4}{3}\right] = \left[-\frac{7}{3}\right] = \boxed{-3}$$

---

③ $\lim_{x\to 1^+}\frac{|x+2|\,|x-1|}{(1-x)(a)}=-\frac{3}{a}$, $\lim_{x\to 1^-}\tan\frac{3\pi}{4}=-1 \to -1=\frac{-3}{a} \to \boxed{a=3}$

$\lim_{x\to 5^-}\frac{|x+2|}{a}=\frac{7}{a}$, $\lim_{x\to 5^+} b(x-[-x])=-b \to \frac{7}{3}=-b \to \boxed{b=\frac{-7}{3}}$

$\to ab=\frac{-7}{3}\times 3=\boxed{-7}$ ✓

(۴) $f(x) = a[x] + a + b[x] + b[a+1] \rightsquigarrow [x](a+b) + b[a+1]$

چون تابع پیوسته است ←

$a+b=0 \rightsquigarrow a=-b$

$\rightsquigarrow f(a) = a[a] + a - a[a] - a[a] = -a[a]$

$\rightsquigarrow \frac{a[a]}{-a[a]} = \boxed{-1}$ ✓

---

(۵) $f(x) = \underbrace{b}_{b=0}[x^2 - ax] - 2a$; چون تابع پیوسته است، پس $b=0$ است:

$\rightsquigarrow f(b) = f(a) = -2a \rightsquigarrow \frac{a}{f(b)} = \frac{a}{-2a} = \boxed{-\frac{1}{2}}$ ✓

---

(۶) $f(x+a) = 0 \rightarrow \frac{4a^2 + 2am + n}{-a} = 0 \rightarrow 4a^2 + 2am + n = 0$ (۱)

$\rightsquigarrow \lim_{x\to a} \frac{x^2 + mx + n}{a - x} = \overset{\text{H.O.P.}}{\lim_{x\to a}} \frac{2x + m}{-1} = 2 \rightarrow 2a + m = -2$

---

(۷) $x \to 0^+ \rightsquigarrow (1-a)(0) + (3a^2 - 1)(-1) = -3a^2 + 1 \rightsquigarrow -3a^2 + 1 = a - 1$

$x \to 0^- \rightsquigarrow (1-a)(-1) + (3a^2 - 1)(0) = a - 1$

$\rightsquigarrow 3a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = -1$ یا $a = \frac{2}{3}$

$\rightarrow a = -1 \rightarrow -2 = b \sin(-\pi) \rightsquigarrow b = 0$ ✗ غیرقابل قبول

$\rightsquigarrow a = \frac{2}{3} \rightsquigarrow -\frac{1}{3} = b \sin\frac{3\pi}{2} \rightsquigarrow -\frac{1}{3} = -b \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$

$\rightsquigarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{2}$ ✓

---

(۸) $x \to 1^+ \rightsquigarrow \frac{3x^2 + mx - m - 1}{mx^2 - m + x - 1}$, $\lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2 - mx + m + 1}{-mx^2 + m - x + 1}$

$\frac{m}{m+2} = \frac{x^2 + mx - m - 1}{mx^2 - m + x - 1} \rightarrow m^2x^2 - m^2 + mx - m = mx^2 + m^2x - m^2 - m + 2x^2 + 4mx - 2m$

$\rightsquigarrow m^2x^2 + mx - (m^2 + m) = (m+2)x^2 + (m^2 + 2m)x \rightarrow (m^2 + 3m + 2) \Rightarrow \boxed{m = -1}$

$\rightsquigarrow \lim_{x\to -1} f(x) = \boxed{-1}$ ✓

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$ a ریشه مخرج و صورت است، زیرا نقطه ای توخالی است، پس داریم (۹)

$\Rightarrow \sqrt{3}\,|a^2+a| = 0 \longrightarrow a = 0$ ✗ , $a = -1$ ✓ اگر -1 باشد $\cancel{1} + (m-2)(-1) + \cancel{1} = 0$

$\Rightarrow -m+2 = 0 \longrightarrow m = 2 \longrightarrow \lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{3}\,|x+1|}{|x^3+1|}$ ساده شدن $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{3}}{|x^2-x+1|} =$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ✓

---

(۱۰)

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x^2+ax} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x(x+1)}{x(x+a)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{a}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(x-1)}{x(x-a)} = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow \frac{2a-1}{2a+2} = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow 2a^2 - a = 2a+2 \longrightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$ ($\sqrt{9+16} = 5$) $\nearrow a = 2$, $\searrow a = -\frac{1}{2}$

① $\lim\limits_{x\to -2} \frac{4+2}{4-\frac{1}{2}(2)} = \frac{6}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$ ✓

② $\lim\limits_{x\to +\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+2(\frac{1}{4})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$ ✓