به نام خدا

ماهان نژادگرد

۱۲_ ریاضی B

تکلیف ۲۱

۲۰ آفرین

۱_

$$\begin{cases} f \text{ در نقطه اول } x=a \text{ پیوسته است} \\ f(a) = \lim_{x\to a} f(x) \end{cases} \Rightarrow \text{تابع پیوسته است}$$

I) برای پیوستگی عبارت زیر رادیکال:

$6x^2+(m+3)x+\frac{m}{2}\geq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow (m+3)^2-4\times 6\left(\frac{m}{2}\right)\geq 0$

$\Rightarrow m^2+9+6m-12m\geq 0$

$\Rightarrow \boxed{(m-3)^2\geq 0}$

به ازای هر مقدار m صحیح است.

۲

II) برای پیوستگی عبارت مخرج:

$2x^3+(m-3)x^2+ax^2\neq 0$

مخرج حتماً ریشه دارد زیرا حد آن در $+\infty$ مثبت و در $-\infty$ منفی است و ریشه آن تنها a می‌تواند باشد.

$\Rightarrow 3a^3+(m-3)a^2=0 \Rightarrow a^2(3a+m-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \text{ غیرقابل قبول} \\ a=-\frac{m-3}{3}=\frac{3-m}{3} \end{cases}$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{6x^2+(m+3)x+\frac{m}{2}}}{|2x^3+(m-3)x^2+ax^2|}=\frac{0}{0}\Rightarrow 6a^2+(m+3)a+\frac{m}{2}=0$$

$$\Rightarrow 6\left(\frac{3-m}{3}\right)^2+(m+3)\left(\frac{3-m}{3}\right)+\frac{m}{2}=0\Rightarrow\frac{12+2m^2-12m-m^2-m+6m}{3}=0$$

$\Rightarrow 3m^2-18m+27=0\Rightarrow m^2-6m+9=0\Rightarrow m=3 \quad a=-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{6x^2+6x+1.5}}{|2x^3+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{6}\,\cancel{|x+\frac{1}{2}|}}{2\cancel{|x+\frac{1}{2}|}\,|x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x|}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\Rightarrow\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sin b}{\sqrt{-a}}\Rightarrow\sin b=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boxed{b=\frac{\pi}{6}}$$

۲_

$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}\Rightarrow$ پیوسته در $x=1$ $\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow 1+a+b=0$

$\Rightarrow\underline{a+b=-1}$ I

$x=1\xrightarrow[\text{از معادله}]{5x^2-ax+b}5-a+b=0\Rightarrow\boxed{5=a-b}$ II

$\xrightarrow[\text{I, II}]{}\begin{matrix}a=2\\ b=-3\end{matrix}\Rightarrow\left[\frac{b-a}{2}\right]=-3$

۳ـ

$\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$ حد $\frac{3x}{4} = \lim_{x\to1^+}\frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} = -1$

۳

$\Rightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{|x-1||x+2|}{a(1-x)} = \frac{-|x+2|}{a} = \frac{-3}{a} = -1 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$\lim_{x\to5^-} f(x) = f(5) \Rightarrow b(10) = \lim_{x\to5^-}\frac{|x^2+x-2|}{3(1-x)} = \frac{28}{-12}$

$\Rightarrow b = \frac{7}{-30} \Rightarrow \boxed{ab = \frac{7}{-30}\times 3 = -0.7}$

۴ـ

$f(x) = a[x+1] + b[x + [a+1]]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to1^+} f(x) = 2a + b(1+[a+1]) \\ f(1) = 2a + b(1+[a+1]) \\ \lim_{x\to1^-} f(x) = a + b([a+1]) \end{cases} \quad \Big| \quad 2a+b+b[a+1] = a+b[a+1] \Rightarrow a=-b$$

۳

$\Rightarrow f(x) = a[x]+a+b[a+1]+b[x] = a[x]+a-a[a+1]-a[x]$

$\Rightarrow f(x) = a-a[a+1] = a-a[a]-a = -a[a] \Rightarrow \frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{-a[a]} \boxed{= -1}$

۵ـ باید ضریب براکت ۰ باشد تا ... پیوسته شود

$\Rightarrow b=0 \Rightarrow f(x) = -2x \Rightarrow \frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$

۳

۶ـ

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{x^2+mx+n}{a-x} = \frac{0}{0} = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+am+n=0 \\ \frac{2a+m}{-1} = 2 \Rightarrow 2a+m=-2 \end{cases}$$

۳

$f(2a) = \frac{4a^2+2am+n}{-a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4a^2+2am+n=0 \\ a^2+am+n=0 \end{cases} \quad 3a^2+am=0$

$\Rightarrow a\neq0$ زیرا $\Rightarrow m=-3a$

$\Rightarrow \begin{cases} m=-3a \\ 2a+m=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ m=-6 \end{cases} \quad n=8 \Rightarrow n-m=14$

$f(a)\neq0$ زیرا

۷ـ

$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in \mathbb{Z}\\ -[x]-1 & x\notin \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-a)[x]+(2a^2-1)(-[x]-1)=(1-a)[x]-(2a^2-1)[x]-(2a^2-1)$$

$$=[x](1-a-2a^2+1)-(2a^2-1) \Rightarrow -2a^2-a+3=0 \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ a=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-(2a^2-1)\\ b\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-1 & \text{غ ق ق}\\ b\sin(-\pi)\end{cases}\\ a=\frac{3}{2}\ \checkmark\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\\ b\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\end{cases} \Rightarrow b\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=2$$

۸ـ

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{|x^2+mx-m-1|}{m|x^2-1|+|x-1|}=\frac{|x-1||x+m+1|}{|x-1|(m|x+1|+1)}$$

$$=\frac{|m+2|}{2m+1}=f(1)=\frac{m}{m+2} \Rightarrow \begin{cases}m\geq -2 \Rightarrow \frac{m+2}{2m+1}=\frac{m}{m+2} \Rightarrow m=-1,\ m=4\\ m<-2 \quad \frac{-(m+2)}{2m+1}=\frac{m}{m+2} \Rightarrow \Delta<0\end{cases}$$

$m=-1$ غ ق ق $\Rightarrow \boxed{m=4}\ \checkmark$

(x=0 , x=-1) زیرا مخرج [illegible] را صفر می‌کند

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{|x^2+4x-5|}{4|x^2-1|+|x-1|}=\frac{\frac{1}{16}-4}{-\frac{15}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{63}{16}}{-\frac{18}{4}}=\frac{7}{8}$$

۹ـ

$$a^3+a^2+(m-2)a=0$$ شرط اینکه a صفر شود

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2}|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+x^2|}=\frac{0}{0} \Rightarrow \sqrt{2}|a^2+a|=0 \Rightarrow a=0,\ a=-1$$

$a=0$ غ ق ق چون مخرج صفر است

$$a=-1 \Rightarrow m=2$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}\,|-x-1|}{|x^2+1|} \Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{a}\,|x+1|}{|x^2-1|} = \frac{\sqrt{a}\,|x+1|}{|x+1||b+|-x||}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{|x^2+bx|} = \frac{\sqrt{a}}{\cancel{2}}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{b+|x|}{b+a|x|} = \frac{a-1}{a+2} \qquad -1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{b+x}{b+ax} = \dfrac{2x+1}{2x+a} = \dfrac{1}{a} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{b-x}{b-ax} = \dfrac{2x-1}{2x-a} = \dfrac{1}{a} \end{cases} \quad \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a+2}$$

$$\Rightarrow a^2 - a = a + 2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

$$a = 3 \checkmark$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^2+|x|}{b+c|x|} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

زیرا تابع دارای نقاط ناپیوستگی دیگری نمی‌شود