به نام خدا

ماهان نژادگرد

۱۲ ـ مهر B

تکلیف ۲۱

۱ ـ

I) تابع پیوسته است $\Leftarrow$ { تابع در $x=a$ پیوسته است ; $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$ }

شرط برای تعریف عبارت زیر رادیکال: $6x^2+(m+3)x+\frac{m}{2}\geq 0 \Rightarrow \Delta\geq 0 \Rightarrow (m+3)^2-4\times 6\left(\frac{m}{2}\right)\geq 0$

$\Rightarrow m^2+9+6m-12m\geq 0$

$\Rightarrow \boxed{(m-3)^2\geq 0}$ برای هر مقدار m صحیح است.

II) شرط برای تعریف عبارت مخرج: $2x^3+(m-3)x^2+x^2\neq 0$

مخرج حتماً ریشه دارد زیرا حد آن در $+\infty$ مثبت و در $-\infty$ منفی است و ریشه آن تنها a می‌تواند باشد.

$\Rightarrow 2a^3+(m-3)a^2+a^2=0 \Rightarrow a^2(2a+m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-\frac{m-2}{2}=\frac{2-m}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{6x^2+(m+3)x+\frac{m}{2}}}{|2x^3+(m-3)x^2+x^2|}=\frac{0^+}{0^+}\Rightarrow 6a^2+(m+3)a+\frac{m}{2}=0$$

$$\Rightarrow 6\left(\frac{2-m}{2}\right)^2+(m+3)\left(\frac{2-m}{2}\right)+\frac{m}{2}=0\Rightarrow \frac{12+3m^2-12m-m^2-m+6+m}{2}=0$$

$$\Rightarrow 2m^2-12m+18=0\Rightarrow m^2-6m+9=0\Rightarrow m=3 \quad a=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{6x^2+6x+1.5}}{|2x^3+\frac{1}{4}|}=\frac{\sqrt{6}\,\cancel{|x+\frac{1}{2}|}}{2\cancel{|x+\frac{1}{2}|}\,|x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x|}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{2}=\frac{2\sin b}{\sqrt{-a}}\Rightarrow \sin b=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \boxed{b=\frac{\pi}{6}}$$

۲ ـ

$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1} \Rightarrow$ پیوسته است در $x=1$ $\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow 1+a+b=0$

$\Rightarrow \underline{a+b=-1}$ I

$x=1 \xrightarrow[\text{با استفاده از هوپیتال}]{2x+a+b} 5-a+b=0 \Rightarrow \boxed{5=a-b}$ II

$\xrightarrow[I,II]{} \begin{matrix} a=2 \\ b=-3 \end{matrix} \Rightarrow \left\{\frac{b-a}{?}\right\} = -3$

۳ -

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \tan\frac{3\pi}{4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} = -1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1||x+2|}{a(1-x)} = \frac{-|x+2|}{a} = \frac{-3}{a} = -1 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = f(5) \Rightarrow b(10) = \lim_{x\to 5^-} \frac{|x^2+x-2|}{3(1-x)} = \frac{28}{-12}$

$\Rightarrow b = \frac{7}{-30} \Rightarrow ab = \frac{7}{-30}\times 3 = \boxed{-0.7}$

۴ -

$f(x) = a[x+1] + b[x + [a+1]]$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2a + b(1+[a+1]) \\ f(1) = 2a + b(1+[a+1]) \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b([a+1]) \end{cases} \quad 2a + b + b[a+1] = a + b[a+1]$

$\Rightarrow a = -b$

$\Rightarrow f(x) = a[x] + a + b[a+1] + b[x] = a[x] + a - a[a+1] - a[x]$

$\Rightarrow f(x) = a - a[a+1] = a - a[a] - a = -a[a] \Rightarrow \frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{-a[a]} = \boxed{-1}$

۵ - باید ضریب پشت براکت ۰ باشد تا تابع ما پیوسته شود

$\Rightarrow b=0 \Rightarrow f(x) = -2a \Rightarrow \frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$

۶ -

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{x^2+mx+n}{a-x} = \frac{0}{0} = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+am+n=0 \\ \frac{2a+m}{-1} = 2 \Rightarrow 2a+m = -2 \end{cases}$

$f(2a) = \frac{4a^2+2am+n}{-a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4a^2+2am+n=0 \\ a^2+am+n=0 \end{cases} \quad 3a^2+am=0$

$\Rightarrow a \neq 0$ طبق

$m = -3a$

$\Rightarrow \begin{cases} m=-3a \\ 2a+m=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ m=-6 \end{cases} \quad n=8 \Rightarrow n-m = 14$

$f(a) \neq 0$ زیرا

۷-

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-a)[x] + (3a^2-1)(-[x]-1) = (1-a)[x] - (3a^2-1)[x] - (3a^2-1)$$

$$= [x](1-a-3a^2+1) - (3a^2-1) \Rightarrow -3a^2-a+2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -(3a^2-1) \\ b\sin\left(\frac{\pi}{a}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \rightarrow f(x) = \begin{cases} -2 & \text{غ ق ق} \\ b\sin(-\pi) \end{cases} \\ a=\frac{2}{3} \checkmark \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ b\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases} \rightarrow \underbrace{b\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

۸-

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{|x^2+mx-m-1|}{m|x^2-1|+|x-1|} = \frac{|x-1||x+m+1|}{|x-1|(m|x+1|+1)}$$

$$= \frac{|m+2|}{2m+1} = f(1) = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \begin{cases} m \geq -2 \Rightarrow \frac{m+2}{2m+1} = \frac{m}{m+2} \rightarrow m=-1 ,\ m=4 \\ m < -2 \quad \frac{-(m+2)}{2m+1} = \frac{m}{m+2} \rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

* $m=-1$ غیر قابل قبول $\rightarrow \boxed{m=4} \checkmark$

زیرا مخرج کسر دارای ریشه‌های دیگر می‌شود $\left(\begin{matrix} x=0 \\ x=-2 \end{matrix}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{|x^2+4x-5|}{4|x^2-1|+|x-1|} = \frac{\frac{1}{16}-4}{\frac{-15}{4}+\frac{-3}{4}} = \frac{-\frac{63}{16}}{-\frac{18}{4}} = \frac{7}{8}$$

۹-

$a^3+a^2+(m-2)a=0 \Rightarrow$ مخرج به ازای a صفر شود

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}\,|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+x^2|} = \frac{0}{0} \Rightarrow \sqrt{a}\,|a^2+a| = 0 \Rightarrow a=0$$ غ ق ق چون صفر است

$a=-1 \Rightarrow m=2$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}\,|-x-1|}{|x^2+1|} \Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5}\,|x+1|}{|x^2-1|}=\frac{\sqrt{5}\,|x+1|}{|x+1|\,|\sqrt{5}+|-x||}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{|x^2+2x|}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x^2+a|x|}=\frac{2a-1}{2a+2} \quad -1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x^2+ax}=\dfrac{2x+1}{2x+a}=\dfrac{1}{a} \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-x}{x^2-ax}=\dfrac{2x-1}{2x-a}=\dfrac{1}{a} \end{cases} \quad \frac{1}{a}=\frac{2a-1}{2a+2}$$

$$\Rightarrow 2a^2-a=2a+2$$

$$\Rightarrow 2a^2-3a-2=0$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

$$a=2 \checkmark$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x^2+|x|}{x^2+2|x|}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5}$$

زیرا تابع دارای نقاط ناپیوستگی دیگری میشود