۱۹ آفرین

رادمهر معتمدی

۱) $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Rightarrow b=a+1$ — تابع f در $x=0$ گوشه داشته و مشتق ندارد پس در نقطه‌ی $x=1$ مشتق دارد

۱٫۵

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2}} & ; x<1\\[2mm] b\,\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & ; x\geq 1\end{cases} \longrightarrow 1=\frac{2}{3}b \to b=\frac{2}{3}\to a=-\frac{1}{3}$$

$$\to a+b=\frac{1}{3}$$

۲) $f'(1)-2g'(1)=\left(f(x)-2g(x)\right)'\Big|_{x=1}$

۲

$$h(x)=(f-2g)(x)=\frac{2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}}-2\,\frac{\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$h(x)=-2\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=-2\sqrt{3}\,x^{-\frac{1}{6}}\to h'(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}x^{-\frac{7}{6}}\to h'(1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۳) $f(x)=\begin{cases}bx+c & ; x<a\\ \dfrac{1}{x} & ; x\geq a\end{cases}$ ⟵ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر ⟵ در $\mathbb{R}$ پیوسته است

۲

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\longrightarrow ba+c=\frac{1}{a}\quad\left\{\begin{array}{l} f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\dfrac{-1}{a^2}\\[2mm] f'_-(a)=b\longrightarrow b=\dfrac{-1}{a^2}\end{array}\right.$$

$$\to \underbrace{ba^2}_{-1}+ac=1\to ac=+2$$

۴) $f(x)=\begin{cases}b & ; x<a\\ b+(x-a)^m & ; x\geq a\end{cases}\longrightarrow f'_-(a)=0$

۲

$$f'_+(a)=\left(m(x-a)^{m-1}\right)\Big|_{x=a}$$

$\longrightarrow m>1\to f'_+(a)=0$

$m<1\to f'_+(a)=$ نامتناهی × $\longrightarrow m=1\to f'_+(a)=\underline{m=1}$ فقط

۵) $f\circ g(x)$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x^3-|x|^3} = \frac{1}{x^3+x^3} = \frac{1}{2}x^{-3}$ ($x<0$)

$x<0 \to g(x)<0$

$\quad \to f(x)<0$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x+x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}x^{-\frac{1}{3}}$ ($x<0$)

۱,۲۵

$h(x)=f\circ g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(g(x)\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2}x^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1 \to h'(-\sqrt[3]{2}) = \underline{0}$

$g(x)<0$, $x<0$

۶) $f'(3)-f(3)=2$

$y=-ax-5 \to$ $f(3)=-3a-5$, $f'(3)=-a$ $\Big\}$ $-a+3a+5=2 \to a=-\frac{3}{2}$

۲

$\frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{3a+5}{a} = 3+\frac{5}{a} = 3-\frac{10}{3} = \underline{-\frac{1}{3}}$

۷) $g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = 2 \to f(x) = x^2\cdot\underbrace{\left[x^2+\frac{1}{2}\right]^2}_{16}+1 = 16x^2+1$

۲ به جای x

$\to f'(x) = 32x$

$(f\circ g(x))' = g'(x)\cdot f'og(x)$ $\qquad g'(x) = \left(\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}(2x)\left(x^2-1\right)^{-\frac{4}{3}}$

۲

$x=\frac{3}{\sqrt{8}} \to -8\sqrt{2}\cdot 32\times 2 = -128\sqrt{2}\times 4$ $\qquad g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}}_{16} = -8\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{(f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)}{-128\sqrt{2}} = \underline{+4}$

۸) $f(x)=f(x\pm 5) \to g(x)=f(x+1)+\underbrace{f(3x+10)}_{f(3x+5)} \to g'(x) = f'(x+1)+3f'(3x+5)$

۲

$x=-2 \to x+1=-1$

$\quad \to 3x=-6 \to 3x+5=-1 \to g'(-2) = f'(-1)+3f'(-1) = \underline{6}$

۹) $\lim_{h\to 0} \frac{\left(f(5-h)-1\right)}{h}\cdot\frac{f(5-h)-2}{5-h} = \frac{f(5)-2}{5}\cdot\left(-f'(5)\right) = -\frac{1}{5}\cdot-\frac{25}{12} = -\frac{5}{12}$

۱,۷۵

$f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+3} \to f'(5) = \left(\sqrt[3]{x+3}+\frac{1}{3}(x+3)^{-\frac{2}{3}}\right)\Big|_{x=5} = 2+\frac{1}{12} = \frac{25}{12}$

۱۰) $y = (x-۲)^۲ + ۱ \rightarrow y' = ۲x - ۴$

$۴y - ۲x = ۱ \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴} \rightarrow m = \frac{۱}{۲}$ ، عمود $\rightarrow m' = -۲ = ۲x - ۴ \rightarrow x_۰ = ۱$

$y_۰ = (۱-۲)^۲ + ۱ \rightarrow y_۰ = ۲ \rightarrow A \begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$

۵

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \rightsquigarrow a+1=b \qquad f(x)=\begin{cases} a+|x| & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases}$$ 1

$$f'_+(1) = f'_-(1) \rightsquigarrow b\times \frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} = 1 \to b\times\frac{2}{3}=1 \to b=\frac{3}{2}$$

$$a=b-1 \to a=\frac{1}{2} \rightsquigarrow a+b=\frac{4}{2}=2$$

نخاطر $|x|$ تنها نقطه‌ای مشتق ناپذیر در $x=0$
است (نقطه‌ای گوشه‌ای) پس در ۱ مشتق‌پذیر است.

$$g(-\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{(-\sqrt[3]{2})^3 - |-\sqrt[3]{2}|^3} = \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$ ۵

$$f(-\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}}} = (-\tfrac{1}{4})^{-\frac{1}{3}} = -(2)^{-2\times-\frac{1}{3}} = -2^{\frac{2}{3}} = -\sqrt[3]{4} \qquad \to f\circ g(x) = x$$

$$g'(x)\times f'(g(x)) = (x)' = 1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(5-h)-2)(f(5-h)-1)}{h(5-h)} = -f'(5)\times\frac{(\overset{2}{f(5)}-1)}{5}$$ 4

$$f'(5) = \sqrt[3]{x+3} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \rightsquigarrow -f'(5) = -(\sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\times 4}) = 2+\frac{1}{12} = -\frac{25}{12}$$

$$-\frac{25}{12}\times\frac{2-1}{5} = \boxed{-\frac{5}{12}}$$

تعریف مشتق
$f(5)$ در

$$\to \frac{f(h)-f(5-h)}{h} = f'(5)$$