«به نام خدا»

«کیوان مکارنسب» ۳۲ تکلیف شماره ۳۲

۱۸/۲۵

(1) شرط پیوسته بودن $f_+(1) = f_-(1) = f(1) \to a+1 = b$ (1)

$$f(x) = \begin{cases} a+|x| & ; x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1 \end{cases} \to f(x) = \begin{cases} a+x & ; 0<x<1 \\ a-x & ; x<0 \\ b\sqrt[3]{x^2} & ; x\geq 1 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ -1 & x<0 \\ \dfrac{2b}{3\sqrt[3]{x}} & x\geq 1 \end{cases}$$

← طبق ضابطه $f(x)$، تابع در $x<0$ و $x \to 0^+$، مشتق ناپذیر است. درنتیجه تابع نوشته شده در $x \to 1^+$ و $1^-$ در $x$، مشتق های برابری داشته باشد.

$$\to \frac{2b}{3\sqrt[3]{1}} = 1 \to \boxed{b = \frac{3}{2}} \xrightarrow{(1)} a = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \to \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$\to a+b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \checkmark$$

(2) $f(1) = 2 \qquad |x-2| = -x+2$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \to \lim_{x\to 1} \frac{2|x-2| - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(-x+2-1)}{x-1}$$

$$\to \lim_{x\to 1} \frac{2(1-x)}{x-1} = -2 = f'(1) \quad (1)$$

می دانیم: $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

$$g(x) = \frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{(\sqrt[3]{x^2})} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2+\sqrt{3x}}{(\sqrt[3]{x^2})} & x>2 \\ \dfrac{2-x+\sqrt{3x}}{(\sqrt[3]{x^2})} & 0<x<2 \end{cases}$$

۱/۲

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+\frac{3}{2\sqrt{3x}})(\sqrt[3]{x^2}) - (\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})(x-2+\sqrt{3x})}{(\sqrt[3]{x^2})^2} & x>2 \\ \dfrac{(-1+\frac{3}{2\sqrt{3x}})(\sqrt[3]{x^2}) - (\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})(-x+2+\sqrt{3x})}{(\sqrt[3]{x^2})^2} & 0<x<2 \end{cases} \to g'(1) = \frac{(-1+\frac{3}{2\sqrt{3}})(1) - (\frac{2}{3})(1+\sqrt{3})}{1}$$

$$\to \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{5}{3} \to f'(1) - 2g'(1) = -2 + \sqrt{3} + \frac{10}{3}$$

$$\to \boxed{\sqrt{3} + \frac{4}{3}} \checkmark$$

(3)

$$f(x) = \begin{cases} bx+c & x<a \\ \dfrac{1}{x} & x\geq a \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} b & x<a \\ -\dfrac{1}{x^2} & x>a \end{cases}$$

$$\to f_+(a) = f_-(a) \Rightarrow ab+c = \frac{1}{a} \quad (1) \quad , \quad f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow b = -\frac{1}{a^2} \quad (2)$$

۲

$$(1),(2) \to a\left(\frac{-1}{a^2}\right) + c = \frac{1}{a} \to \frac{-1}{a} + c = \frac{1}{a} \to \frac{2}{a} = c \to \boxed{ac = 2}$$

Year ........ Month. ........ Day. ........ Subject: ........

۴

اولاً باید پیوسته باشد → $f(a^+) = f(a^-) \to b = b(a-a)^m \to b \neq b$ ✓

ثانیاً مشتق پذیر است

باید مشتق پذیر باشد. $\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x > a \end{cases} \to$

۱٫۷

---

۵

می دانیم: $(fog)'(x) = g'(x)\, f'(g(x)) \to g'(-\sqrt[3]{2})\, f'(g(-\sqrt[3]{2})) =$

$= (f(g(-\sqrt[3]{2}))' \to fog(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 - |x^3| - |x^3 - |x^3||}}$

$fog(x) = \begin{cases} x^3 - x^3 - 0 = 0 & x > 0 \\ \dfrac{x^3 + x^3 - 2|x^3|}{4|x^3|} & x < 0 \end{cases} \to fog(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 4x^3 & x < 0 \end{cases}$

۱٫۵

$\to (fog)'(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 12x^2 & x < 0 \end{cases} \to fog'(-\sqrt[3]{2}) = 12(-\sqrt[3]{2})^2 = 12\sqrt[3]{4}$ ✓

---

۶

$f(x) = -ax - 5 \to f(3) = -3a - 5$

$f'(x) = -a \to f'(3) = -a \to -a - (-3a - 5) = 2$

۲

$\to -a + 3a + 5 = 2 \to 2a = -3 \to a = -\frac{3}{2} \to f'(3) = \frac{3}{2}$ ✓

$f(3) = \frac{3}{2}(3) - 5 = \frac{9}{2} - \frac{10}{2} = \frac{-1}{2}$ ✓

$\to \dfrac{f(3)}{f'(3)} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$ ✓

---

۷

$(fog(x))' = g'(x)\, f'(g(x))$

$g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8} - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 2 \;,\; g'(x) = \dfrac{\dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{(\sqrt[3]{x^2-1})^2} \Rightarrow g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = -8\sqrt{2}$

۲

$\underline{g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = 2}\; f'(2) \to \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(2[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1 - 65}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{16(x^2-4)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} 16(x+2) = 64 \to (fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = -8\sqrt{2} \times 64 = -512\sqrt{2}$

$\to \dfrac{-512\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4$ ✓

---

۸

$f(x \pm nT) = f(x) \to f(3x + 3(5)) = f(3x+5)$

$g(x) = f(x+1) + f(3x+5) \to g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+5) \to g'(-2) = f'(-1) + 3f'(-1)$

$\to g'(-2) = 4f'(-1) = 4(\frac{3}{2}) = 6$ ✓

۲

(9)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(5-h)-1)(f(5-h)-2)}{h(5-h)} \quad ①$$

$\rightarrow f(5)=(5-4)\sqrt[3]{8}=2 \xrightarrow{①} \lim_{h\to 0}\frac{(f(5-h)-1)(f(5-h)-f(5))}{(5-h)\times h}$ ۱,۷۵

$\rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(f(5-h)-1)}{5-h}\times f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(5)-1}{5}\times f'(5)=?\quad f'(5)$

$\rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}\times(x-4)+\sqrt[3]{x+3}\Rightarrow f'(5)=\frac{1}{3\times 4}+2=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$

$\rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{5}\times\frac{25}{12}=\frac{5}{12}$ ✓

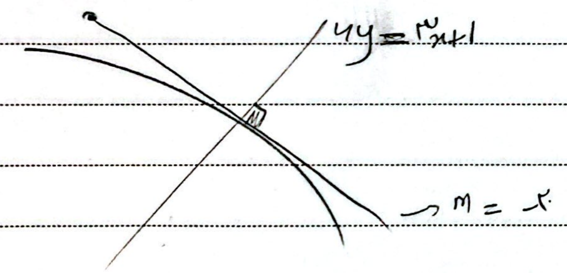
(10) ۲

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{خط عمود}} m'=-2 \rightarrow$ شیب باید شیب تابع در $x=a$ ،

$m=\frac{1}{2}$ ✓ باید ۲- باشه

$\rightarrow f'(x)=2x-4 \longrightarrow 2x-4=-2 \longrightarrow 2x=2 \longrightarrow \boxed{x=1=a}$

$\rightarrow$ نقطه مورد نظر $=\begin{bmatrix}1\\f(1)\end{bmatrix} \longrightarrow f(1)=1-4+5=2 \rightarrow \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ✓



$$f(x)=\frac{۴-۲x}{\sqrt[۳]{x^۲}} \rightarrow f'(۱)=\frac{-۲(\sqrt[۳]{۱})-\frac{۲}{۳}(۱)^{-\frac{۱}{۳}}(۴/۲)}{\sqrt[۳]{۱}}=-\frac{۱۰}{۳}$$ ۳

$$g(x)=\frac{|x-۲|+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^۲}} \rightarrow g'(۱)=\frac{(-۱+\frac{۳}{۲\sqrt{۳}})(۱)-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{۱}}(۱+\sqrt{۳})}{\sqrt[۳]{۱}}$$

$$g'(۱)=-۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۶}-\frac{۲}{۳}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}=-\frac{۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

$$f'(۱)\,۵g'(۱)=-\frac{۱۵}{۳}+\frac{۱۰}{۳}+\frac{۲\sqrt{۳}}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

---

نقطهٔ گوشه‌ای $\rightarrow f_{+}(a)=f_{-}(a)$ ۴

$m=0 \rightarrow$ مشتق هر ۲ ضابطه برابر است $\times$

$m=1 \rightarrow f'_{-}(a)=0 \;,\; f'_{+}(a)=1$ ✓ $\rightarrow \boxed{m=1}$

$\geq ۲ \rightarrow f'_{-}(a)=0 \;,\; f'_{+}(a)=m(\underbrace{x-a}_{a-a=0})^{m-1}$ $\times$

---

$$g(-\sqrt[۳]{۲})=\frac{۱}{(-\sqrt[۳]{۲})^۳-|-\sqrt[۳]{۲}|^۳}=\frac{۱}{-۲-۲}=-\frac{۱}{۴}$$ ۵

$$f(-\tfrac{۱}{۴})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}}}=(-\tfrac{۱}{۲})^{-\frac{۱}{۳}}=-(۲)^{-۱\times-\frac{۱}{۳}}=-۲^{\frac{۱}{۳}}=-\sqrt[۳]{۲}$$ $\rightarrow f\circ g(x)=x$

$$g'(x)\times f'(g(x))=(x)'=۱$$

۹

$$\lim_{h\to ۰} \frac{(f(۵-h)-۲)(f(۵-h)-۱)}{h(۵-h)} = -f'(۵) \times \frac{(\overset{۲}{f(۵)}-۱)}{۵}$$

$$f'(۵) = \sqrt[۳]{x+۳} + \frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}} \leadsto -f'(۵) = -\left(\sqrt[۳]{۸} + \frac{۱}{۳\times۴}\right) = ۲+\frac{۱}{۱۲} = -\frac{۲۵}{۱۲}$$

$$-\frac{۲۵}{۱۲} \times \frac{۲-۱}{۵} = \boxed{-\frac{۵}{۱۲}}$$

تعریف مشتق در $f(۵)$ $\longrightarrow$ $\dfrac{f(h) - f(۵-h)}{h} = f'(۵)$