نام و نام خانوادگی ...امیرمحمد ابوطالبی... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره .... کلاس ....

۱۹,۵

۱

$f(x)=\begin{cases} a+|x| & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\ge 1\end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \rightsquigarrow a+1=b$

$f'_+(1) = f'_-(1) \rightsquigarrow b\times\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}=1 \to b\times\frac{2}{3}=1 \to b=\frac{3}{2}$

$a=b-1 \to a=\frac{1}{2} \rightsquigarrow a+b=\frac{4}{2}=2$

ضمناً $|x|$ تنها نقطه‌ی مشتق ناپذیر در $x=0$ است (نقطه‌ی گوشه‌ای) پس در ۱ مشتق‌پذیر است.

۰

۲

$f'(x) \overset{x=1}{=} \frac{-2x+4}{\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow -2\left(\sqrt[3]{x^2}\right) - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(-2x+4) \longrightarrow \frac{-6x+4x-8}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{f'(1)} \frac{-10}{3}$

$g'(x) \overset{x=1}{=} \frac{|x-2|+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow \frac{-x+2+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{g'(x)} -\left(\frac{+2x+\sqrt{x}+8}{6x^{5/3}}\right) = g'(1) = \frac{-11}{6}$

راه حل بسیار طولانی بود

$\frac{-10}{3} - (2)\left(\frac{-11}{6}\right) = \frac{1}{3}$

۱,۲۵

۳

$f(x)=\begin{cases} bx+c & x<a \longrightarrow f'(a)=b \\ \frac{1}{x} & x\geq a \to f'(a)=\frac{-1}{a^2}\end{cases}$

$x^{-1} \to -x^{-2} \to \frac{-1}{x^2}$

شرط مشتق پذیری ← پیوسته باشد و مشتق چپ و راست باهم برابر باشد.

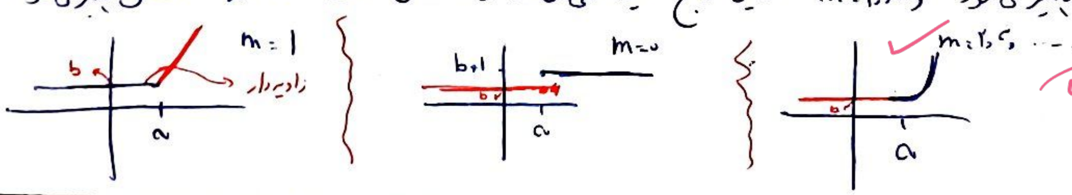
$ab+c=\frac{1}{a}$ (I) $\quad \boxed{b=\frac{-1}{a^2}}$ (II)

$\to ab+c=\frac{1}{a} \to a\times\frac{-1}{a^2}+c=\frac{1}{a} \to \frac{-1}{a}+c=\frac{1}{a} \to \boxed{c=\frac{2}{a}} \longrightarrow ac=\frac{2}{a}\times a = 2$

۲

۴

• فقط به ازای $m=1$ که داخل $(x-a)^m$ ریشه ساده باشد تابع گوشه‌ای می‌شود زیرا در $m=0$ تابع ثابت $b+1$ می‌شود و درست است مشتق ناپذیر می‌شود اما نقطه گوشه‌ای محسوب نمی‌شود و چون ناپیوسته است مشتق ناپذیر می‌شود و $m=2,3,\dots$ در اینجا تابع یک منحنی می‌شود و در داخل نقطه $x=a$ مشتق پذیر می‌شود.



۲

۵

$g'(x)\cdot f'(g(x)) = (f\circ g)'(x) = (f(g(x)))'$

$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-|x^3|} - \left|\frac{1}{x^3-|x^3|}\right|}} \xrightarrow[\text{صفر نشود باید } (x<0) \text{ باشد}]{\text{برای اینکه تابع برقرار شود و مخرج } \frac{1}{x^3-|x^3|}} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2x^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^3}}}$

$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}$

$(f\circ g)'(x) = 1$

۲

$f'(۳) = -a = \frac{۳}{۲}$

$f(۳) = -۳a - ۵ = -\frac{۱}{۲}$

$f'(۳) - f(۳) = ۱ \rightarrow -a + ۳a + ۵ = ۲ \rightarrow ۲a + ۵ = ۲ \rightarrow ۲a = -۳$ ۶

$\rightarrow \boxed{a = -\frac{۳}{۲}} \rightarrow \frac{f(۳)}{f'(۳)} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۱}{۳}$

۲

$(f o g)'(x) = g'(x) . f'(g(x))$

$g'(x) = (x^۲ - ۱)^{-\frac{۱}{۳}} \rightarrow -\frac{۱}{۳}(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}} \times ۲x \rightarrow \frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}} \xrightarrow{x = \frac{۳}{\sqrt{۸}}} -۸\sqrt{۲}$ ۷

$g(x) \xrightarrow{x = \frac{۳}{\sqrt{۸}}} g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = ۲ \rightarrow f'(۲) \rightarrow [x^۲ + \frac{۱}{۴۲}] = c \rightarrow f(x) = (x-c)^۲ + ۱^۲$, $f'(x) = ۴c^۳x$

اگر لدر صحیح ترد

$f'(۲) = ۲ \times ([x^۲ + \frac{۱}{۲}])^۲ \times ۲ = ۶۴$ $\cancel{x^۲c^۲+۱}$

$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) . f'(۲) = -۸\sqrt{۲} \times ۶۴$ $\frac{\cancel{۶۴} \times + ۸\sqrt{۲}}{+ \frac{۱۲۸\sqrt{۲}}{۲}} = ۴$

۲

$f(x) \longrightarrow T = ۵ \longrightarrow f'(x) = f'(x+۵)$

$g(x) = f(x+۱) + f(۳x+۱) \longrightarrow g'(x) = f'(x+۱) + f'(۳x+۱)$

$g'(-۲) = f'(-۱) + f'(۴) \xrightarrow{f'(۴) = f'(-۱) \rightarrow \text{طبق تناوب بالا}} g'(-۲) = ۲f'(-۱) \xrightarrow{f'(-۱) = \frac{۳}{۲}} \boxed{g'(-۲) = ۳}$ ۸

۱٫۵

$\lim_{h \to ۰} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} \xrightarrow{f(۵-h) = t} t^۲ - ۳t + ۲ = (t-۱)(t-۲)$

۱٫۷۵

$f(۵) = ۲$

$\rightarrow \frac{(f(۵-h)-۲)(f(۵-h)-۱)}{h(۵-h)} \xrightarrow{h \to ۰} \frac{f(۵-h) - ۲}{h} \times \frac{\cancel{f(۵-h)} - ۱}{۵-h} \rightarrow f'(۵) \times \frac{۱}{۵}$ ۹

$f(x) = (x-۴)(\sqrt[۳]{x+۳}) \rightarrow f'(x) = (۱)(\sqrt[۳]{x+۳}) + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}(x-۴) \rightarrow f'(۵) = ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲} \rightarrow \frac{۲۵}{۱۲} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۵}{۱۲}$

$۶y - ۳x = ۱ \rightarrow ۶y = ۳x + ۱ \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۶} \longrightarrow \boxed{\frac{۱}{۲} \text{ قرینه و معکوس}} = -۲$

$y = x^۲ - ۴x + ۵ \rightarrow y' = ۲x - ۴ \rightarrow -۲ = ۲x - ۴ \rightarrow ۲ = ۲x \rightarrow \boxed{x = ۱}$

$y = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow{x = ۱} ۱ - ۴ + ۵ = ۲$

۲ ۱۰

نقطه $(۱, ۲)$

$$f(x) = \frac{4-2x}{\sqrt[3]{x^2}} \to f'(1) = \frac{-2(\sqrt[3]{1}) - \frac{2}{3}(1)^{-\frac{1}{3}}(4-2)}{\sqrt[3]{1}} = -\frac{10}{3}$$ ۶

$$g(x) = \frac{|x-2| + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}} \to g'(1) = \frac{\left(-1 + \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)(1) - \frac{2}{3\sqrt[3]{1}}(1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{1^2}}$$

$$g'(1) = -1 + \frac{3\sqrt{3}}{6} - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$f'(1) - 2g'(1) = -\frac{10}{3} + \frac{10}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(5-h) - 2)(f(5-h) - 1)}{h(5-h)} = -f'(5) \times \frac{(\overset{2}{f(5)} - 1)}{5}$$ ۹

$$f'(5) = \sqrt[3]{x+3} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \rightsquigarrow -f'(5) = -\left(\sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\times 4}\right) = 2 + \frac{1}{12} = -\frac{25}{12}$$

$$-\frac{25}{12} \times \frac{2-1}{5} = \boxed{-\frac{5}{12}}$$

تمرین مشتق

$f(5)$ را $\to \frac{f(h) - f(5-h)}{h} = f'(5)$

$$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$$ ۸

$$\xrightarrow{x=-2} g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) \xrightarrow{f'(4) = f'(-1)} g'(-2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = \boxed{6}$$