نوید امینی تکلیف ۲۲

۱۹٫۲۵ آفرین

۱)

$a+1=b$

$$f(x)=\begin{cases} a+|x| & x<1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x\geq 1 \end{cases}$$ → در $x=1$ مشتق پذیر → نقطه‌ی گوشه‌ای $x=$

$$f'(x)=\begin{cases} 1 \\ b\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} \end{cases} \to f'(1)=1=\frac{b(2)}{3} \to b=\frac{3}{2} \text{ و } a=\frac{1}{2}$$

۲

---

۲)

$$(f-2g)'(x)=f'(x)-2g'(x)=\left(\frac{|2x-4|-2(|x-2|+\sqrt{3x})}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=\left(\frac{-2\sqrt{3x}}{3x^2}\right)'$$

$$=-\left(\frac{\frac{3\times 2}{2\sqrt{3x}}\times 3x^2-2\sqrt{3x}\,(6x)}{9x^4}\right) \xrightarrow{x=1} \frac{\frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}}\times 3-\sqrt{3}\times 6}{9}=\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{9}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱٫۷۵

---

۳)

$$f(x)\begin{cases} bx+c & x<a \\ \frac{1}{x} & x\geq a \end{cases}$$ → در $x=a$ مشتق ناپذیر است و تعریف می‌شود $a>0$

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x) \to ba+c=\frac{1}{a} \quad \text{I}$$

$$f'(x)=\begin{cases} b & x<a \\ -\frac{1}{x^2} & x>a \end{cases}$$

$$b=-\frac{1}{a^2} \quad \text{II}$$

$$\text{I و II} \to -\frac{1}{a^{\cancel{2}}}\times\cancel{a}+c=\frac{1}{a} \to c=\frac{2}{a} \to ac=2$$

۲

---

۴)

$$f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} \cancel{b}\,0 & x<a \\ m(x-a)^{m-1} & x>a \end{cases} \to m(\cancel{x}-a)^{m-1}\neq 0$$

$$m(a^+-a)^{m-1}\neq 0$$

$$m(0^+)^{m-1}\neq 0 \to m=1$$

۲

اگر توان‌اش هر چیزی جز صفر شود مقدارش صفر و در آن صورت نیم مماس چپ و راست هم راستا و نقطه‌ی گوشه‌ای نمی‌شود.

---

۵)

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\times g'(x) \qquad (f\circ g)'(-\sqrt[3]{2})$$

$$f\circ g=\frac{1}{\sqrt[3]{x^4-|x^3|-|x^3-|x|^3|}} \xrightarrow[|x|=-x]{x=\sqrt[3]{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{4x^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}\times x}=-\frac{1}{2}$$

۱٫۵

۶)

$g(3) = f(3) = -3a-5$

$g'(3) = f'(3) = -a \longrightarrow -a + 3a + 5 = 2 \to a = -\frac{3}{2}$

$f(3) = -\frac{1}{2}$

$f'(3) = \frac{3}{2} \to \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$

۲

---

۷)

$(f\circ g)' = f'\circ g \times g' \to g'(x) = \frac{-3x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{\frac{9}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{4}} = -4\sqrt{2}$

$g(\frac{3}{\sqrt{2}}) = 2 \to \underbrace{f}_{\text{۲ در}} = \underbrace{\left(x\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 + 1}_{16x^2+1} \to f'(x) = 32x \xrightarrow{x=2} 64$

۲ $\to \frac{64 \times -4\sqrt{2}}{-16\sqrt{2}} = 4$

---

۸)

$f(x) = f(x\pm 5) \to f'(x) = f'(x\pm 5) \xrightarrow{x=4} f'(4) = f'(-1)$

$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10) \xrightarrow{x=-2} g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) = 4f'(-1) = 4\times\frac{3}{2} = 6$

۲

---

۹)

$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{h\to 0} \frac{2f(5)f'(5)\times -1 + 3f'(5)}{-2h+5}$

$f(5) = 1\times 2 \quad f'(x) = 1(\sqrt[3]{x+3}) + (x-4)\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \xrightarrow{x=5} 2 + \frac{1}{12}$

$\frac{2(2)\frac{25}{12}\times -1 + 3(\frac{25}{12})}{5} = \frac{-5}{12}$

۲

---

۱۰)

$6y - 3x = 1 \to$ شیب $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \to$ شیب عمود $= -2$

$y' = 2x - 4 = -2 \to x = 1 \quad y(1) = 1 - 4 + 5 = 2 \to A(1,2)$

۲

نوید امینی - تکلیف ۲۲

۴

$$f(x)=\frac{۴-۲x}{\sqrt[3]{x^۲}} \rightarrow f'(۱)=\frac{-۲(\sqrt[3]{۱})-\frac{۲}{۳}(۱)^{-\frac{۱}{۳}}(۴-۲)}{\sqrt[3]{۱}}=-\frac{۱۰}{۳}$$

$$g(x)=\frac{|x-۲|+\sqrt{۳x}}{\sqrt[3]{x^۲}} \rightarrow g'(۱)=\frac{\left(-۱+\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\right)(۱)-\frac{۲}{۳\sqrt[3]{۱}}(۱+\sqrt{۳})}{\sqrt[3]{۱}}$$

$$g'(۱)=-۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۶}-\frac{۲}{۳}-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}=-\frac{۵}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

$$f'(۱)-۲g'(۱)=-\frac{۱۰}{۳}+\frac{۱۰}{۳}+\frac{۲\sqrt{۳}}{۶}=\boxed{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

۵

$$g(-\sqrt[3]{۲})=\frac{۱}{(-\sqrt[3]{۲})^۳-|-\sqrt[3]{۲}|^۳}=\frac{۱}{-۲-۲}=-\frac{۱}{۴}$$

$$f\left(-\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۱}{\sqrt[3]{-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}}}=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۱}{۳}}=-(۲)^{-۱\times-\frac{۱}{۳}}=-۲^{\frac{۱}{۳}}=\boxed{-\sqrt[3]{۲}}$$

$\rightarrow f\circ g(x)=x$

$$g'(x)\times f'(g(x))=(x)'=۱$$