سجاد سبحانی

شماره تکلیف: ۲۴

۱۹٫۲۵ آفرین

۱) شیب خط گذرا از ۲ نقطه را به دست می‌آوریم و شیب آن خط، مشتق مورد نظر است.

$m = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3} \longrightarrow f'(3) = \frac{4}{3}$ ✓ ۲

۲)

$m = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$ [illegible]

$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = \sqrt{ax-1} \Rightarrow (x+4)^2 = 9ax-9 \Rightarrow x^2+8x+16 = 9ax-9 \Rightarrow x^2+(8-9a)x+25=0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (8-9a)^2-100=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \checkmark \\ a=-\frac{2}{9} \text{ غق ق} \end{cases} \longrightarrow$ چرا که دیگر تابع مشتق‌پذیر نمی‌شود

۲

$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{9} = \boxed{3}$ ✓

۳) چون دو نمودار بر هم مماس هستند پس هم مقادیر و هم مشتق‌های آن‌ها در $x=1$ برابر است پس:

① $\frac{1+m+1}{4} = \frac{n+2}{4} \Rightarrow \boxed{m = n+1}$

② $\frac{(2x+m)(x+2)-(x^2+mx+1)}{(x+3)^2} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{9+2m}{16} = \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{m=2}$ ۲

①,② $\Rightarrow m=2,\ n=1$

$m+n = 2+1 = 3$ ✓

۴) $3g'(\frac{5\pi}{2}) - f'(\frac{5\pi}{2}) = (3g-f)'(\frac{5\pi}{2}) = \left(\frac{9}{3+\sin x} - \frac{(2-\sin x)(9+\sin^2 x+2\sin x)}{(2-\sin x)(2+\sin x)}\right)' = (-\sin x)'$

$= -\cos x \overset{x=\frac{5\pi}{2}}{=} \boxed{-1}$ ✓ ۲

۵) باید در ضابطه‌های تابع علامت برداریم:

۱٫۷۵

$g(x) = \frac{1}{2x^2},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{2x}}$

$(fog)'(\sqrt[5]{x^3}) = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2\times\frac{1}{2x^5}}}\right)' = (x)' = \boxed{1}$

۶) $f(x) = x(g(x))+1 \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)-1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

$f'(x) = 2\left(\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}\right)' = \frac{-2(\sin 2x)'}{(1+\sin 2x)^2} = \frac{-4\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-4\times1}{1} = \boxed{-4}$ ✓ ۲

۷) نمودار مورد نظر $y=-x^2-1$ است دو خط مماس که این نمودار را قطع کنند دو نقطه؛ طول ترتیبی هم بدست آورید:

چون شیب‌ها برهم عمودند پس ضرب شیب‌ها برابر (-1) است، $m_1\times m_2=-1$ $\quad x_2=-x_1$

$$\Rightarrow y=-x^2-1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=-2x \Rightarrow -2x_1\times -2x_2=4x_1x_2=-4x_1^2=-1\Rightarrow x_1=\pm\frac{1}{2}$$

۲

پس $d=-(-\frac{1}{2})^2-1=\boxed{-\frac{5}{4}}$

و فاصله این خط از محور مختصات برابر است: $\frac{5}{4}$.

۸)

$$y=ax \Rightarrow 2\sqrt{x}\,(4x^2+3)=ax \xrightarrow{x\geq 0} 8x^2+6=a\sqrt{x}$$

$$=\frac{1}{a}(8x^2+6)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \frac{1}{a}(16x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{32\sqrt{x}\times x=a}$$

$$2\sqrt{x}(4x^2+3)=32x\sqrt{x}\times x \Rightarrow 6=24x^2 \to x^2=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}\to \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

$$a=32\sqrt{x}\times x=32\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\boxed{8\sqrt{2}}$$ شیب خط مماس

۲

۹)

$$y=ax \to \frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}=ax \xrightarrow{x>0} \frac{1}{-2x^2+x+1}=a\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=a(-2x^2+x+1) \xrightarrow{\text{مشتق گیری}}$$

$$\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=a(-4x+1) \Rightarrow a=\frac{1}{2x\sqrt{x}\,(4x-1)} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}(4x-1)}=\frac{1}{-2x^2+x+1}\Rightarrow$$

$$-2x^2+x+1=8x^2-2x \Rightarrow 10x^2-3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{20}=\frac{1}{2},\ \cancel{-\frac{1}{5}}$$

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

۲

۱۰)

$$(f\circ g)'_-(\tfrac{\sqrt{5}}{2})=g'_-(\tfrac{\sqrt{5}}{2})\,f'(g(\tfrac{\sqrt{5}}{2}^-))=\frac{2x}{x\sqrt{x^2-1}}\times f'_+(2^+)=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{4}}\times\left(\frac{(2x)^3}{8x^3}\right)'=\sqrt{5}\times 24\times 4=\boxed{96\sqrt{5}}$$

۱/۵

$$\frac{96\sqrt{5}}{-48\sqrt{5}}=\boxed{-2}$$

۵

$g'(x) \times f'(g(x)) = (f \circ g)'(x)$

$x>۰ \longrightarrow g(x) = \dfrac{۱}{۲x^{۵}} \longrightarrow f(x) = \dfrac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}} \rightsquigarrow f\circ g\,(x) = \dfrac{-۱}{\sqrt[۵]{۲\left(\frac{۱}{۲x^{۵}}\right)}}$

$f\circ g(x) = -x \longrightarrow f\circ g'(x) = \boxed{-۱} \rightsquigarrow f\circ g'(\sqrt[۵]{۳}) = -۱$

---

۱۰

$g(x) = (x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۲}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{۱}{۲}(۲x)(x^{۲}-۱)^{-\frac{۳}{۲}}$

$g'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right) = -\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵})\left(\frac{۵}{۴}-۱\right)^{-\frac{۳}{۲}} \longrightarrow -\frac{\sqrt{۵}}{۲}\left(\underbrace{\cancel{۲^{-۲(-\frac{۳}{۲})}}}_{۸}\right) = -۴\sqrt{۵}$

$g\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{-}\right) = \dfrac{۱}{\sqrt{\frac{۵^{-}}{۴}-۱}} = \dfrac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}^{-}}} = \dfrac{۱}{\frac{۱}{۲}^{-}} = ۲^{+}$

$f'(۲^{+}) = ((۲x)^{۳})' = ۲۴x^{۲} = ۲۴\times۴$

$f\circ g'\left(\frac{\sqrt{۵}^{-}}{۲}\right) = -۴\sqrt{۵}\times ۲۴\times۴ \xrightarrow{\div -۴۸\sqrt{۵}} \dfrac{\cancel{۲۴}^{۲}\times\cancel{۴}\times -۴\sqrt{۵}}{-\cancel{۴۸}\sqrt{۵}} = ۸$