سجاد سبحانی

شماره تکلیف : ۲۴

۱) شیب خط گذرا از دو نقطه را به دست می‌آوریم و شیب آن خط، مشتق مورد نظر است.

$$m = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3} \longrightarrow f'(3) = \frac{4}{3}$$

۲)

$$m = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = \sqrt{ax-1} \Rightarrow (x+4)^2 = 9ax-9 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 9ax - 9 \Rightarrow x^2 + (8-9a)x + 25 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (8-9a)^2 - 100 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \checkmark \\ a = -\frac{2}{9} \text{ غ ق ق} \end{cases} \rightarrow$$ به‌ازای مقدار منفی ریشه منفی می‌شود

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

۳) چون دو نمودار بر هم مماس هستند پس هم مقادیر و هم مشتق‌های آن‌ها در $x=1$ برابر است پس،

$$① \quad \frac{1+m+1}{4} = \frac{n+2}{4} \Rightarrow \boxed{m = n+1}$$

$$② \quad \frac{(\overset{3+m}{\cancel{2x+m}})(\overset{4}{\cancel{x+2}}) - (\overset{3+m}{\cancel{x^2+mx+1}})}{(x+3)^2} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{9+2m}{16} = \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

$$\xrightarrow{①,②} \begin{matrix} m = 2 \\ n = 1 \end{matrix} \quad ④$$

$$m + n = 2 + 1 = \underline{3}$$

۴)

$$3g'\left(\frac{5\pi}{2}\right) - f'\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (3g-f)'\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \left(\frac{9}{3+\sin x} - \frac{(2-\sin x)(4+\sin^2 x + 2\sin x)}{(2-\sin x)(2+\sin x)}\right)' = (-\sin x)'$$

$$= -\cos x \overset{x=\frac{5\pi}{2}}{=} \boxed{-\frac{1}{2}}$$

۵) با توجه به قضیه مشتق‌ها، تابع علامت برداریم:

$$g(x) = \frac{1}{2x^5}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{2x}}$$

$$(f\circ g)'(\sqrt[5]{0.5}) = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2\times\frac{1}{2x^5}}}\right)' = (x)' = \boxed{1}$$

۶)

$$f(x) = x(g(x)) + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)-1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \overset{f(0)}{①}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}\right)' = \frac{-2(\sin 2x)'}{(1+\sin 2x)^2} = \frac{-4\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-4\times 1}{1} = \boxed{-4}$$

۷) نمودار مورد نظر $y=-x^2-1$ است دو نقطه فصل مشترک این نمودار را قطع کند دو نقطه، طول آن را بدست آورید:

$x_2=-x_1$ $\qquad$ $m_1\times m_2=-1$ ، چون شیب‌ها بر هم عمودند پس ضرب شیب‌ها برابر -1 است

$\Rightarrow y=-x^2-1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=-2x \Rightarrow -2x_1\times -2x_2=4x_1x_2=-4x_1^2=-1 \Rightarrow x_1=\pm\frac{1}{2}$

پس $d=-(\frac{1}{2})^2-1=\boxed{-\frac{5}{4}}$

و نقطه این خط از محور مختصات برابر است: $\frac{5}{4}$

$y=ax \Rightarrow 2\sqrt{x}\,(4x^2+3)=ax \xrightarrow{x\geq 0} 8x^2+6=a\sqrt{x}$ ⑧

$=\frac{1}{a}(8x^2+6)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{a}(16x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{32\sqrt{x}\times x=a}$

$2\sqrt{x}(4x^2+3)=32x\sqrt{x}\times x \Rightarrow 6=24x^2 \rightarrow x^2=\frac{6}{24}=\frac{1}{4} \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$

$a=32\sqrt{x}\times x=32\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\boxed{8\sqrt{2}}$ شیب و خط مماس

$y=ax \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}=ax \xrightarrow{x>0} \frac{1}{-2x^2+x+1}=a\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=a(-2x^2+x+1) \xrightarrow{\text{مشتق}}$ ⑨

$\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=a(-4x+1) \Rightarrow a=\frac{1}{2x\sqrt{x}(4x-1)} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}(4x-1)}=\frac{1}{-2x^2+x+1} \Rightarrow$

$-2x^2+x+1=8x^2-2x \Rightarrow 10x^2-3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{20}=\frac{1}{2},\ \cancel{-\frac{1}{5}}$

$f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

⑩

$(f\circ g)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})=g'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})\,f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2}^-))=\frac{4x}{x\sqrt{x^2-1}}\times f'_+(2)=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{(2x)^4}{8x^3}\right)'=\sqrt{5}\times 24\times 4=\boxed{96\sqrt{5}}$

$\frac{96\sqrt{5}}{-48\sqrt{5}}=\boxed{-2}$