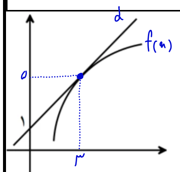
نام و نام خانوادگی ....آروین خالق‌زاده.... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره .... کلاس ....

۱۹,۵ آفرین

۱

نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه‌ی $(۳,۵)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(۳)$ را بیابید.



$d = \alpha x + 1$

$(0,1),(3,d)$ $\Rightarrow \alpha = \frac{d-1}{3-0} = \frac{4}{3} \Rightarrow d = \frac{4}{3}x + 1 \Rightarrow d' = \frac{4}{3}$

در نقطه‌ی $(3,d)$: $f(3) = d(3)$, $f'(3) = d'(3)$ $\Rightarrow f'(3) = d' = \frac{4}{3}$

۲

۲

خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{ax-۱}$ در نقطه‌ی A از نقاط $(-۱,۱)$ و $(۲,۲)$ می‌گذرد. مقدار $f(۵)$ را بیابید.

$\alpha = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$ معادله $\Rightarrow y = \frac{x+4}{3}$ ($y = \frac{1}{3}x + \beta$) $\Rightarrow 3\sqrt{ax-1} = x+4 \Rightarrow 9ax - 9 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow x^2 + (8-9a)x + 25 = 0$

در نقطه‌ی تماس ریشه‌ی مضاعف دارد $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (8-9a)^2 - 100 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow f(5) = \sqrt{10-1} = 3$

$\Rightarrow a = -\frac{2}{9}$ غ ق ق

۲

۳

معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $۴y - ۳x = n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟

★ $\Rightarrow y = \frac{3x+n}{4} \Rightarrow y' = \frac{3}{4}$ (1)

★ $\Rightarrow y' = \frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2}$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3(x+3)^2 = 4x^2 + 24x + 12m - 4 \Rightarrow m = 2$ (1)

★ $\Rightarrow y = \frac{x^2+2x+1}{x+3} = \frac{3x+n}{4}$

$x=1 \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{n+3}{4} \Rightarrow n = 1$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow m+n = 3$

۲

۴

اگر $f(x) = \frac{۲۷-\sin^۳ x}{۹-\sin^۲ x}$ و $g(x) = \frac{۳}{۳+\sin x}$ باشد، حاصل عبارت $۳g'\left(\frac{۵\pi}{۳}\right) - f'\left(\frac{۵\pi}{۳}\right)$ را بیابید.

$\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x} = \frac{(\cancel{3-\sin x})(9+3\sin x+\sin^2 x)}{(\cancel{3-\sin x})(3+\sin x)} = \frac{\sin^2 x + 3\sin x + 9}{3+\sin x} \Rightarrow 3g(x) - f(x) = \frac{\cancel{9} - \sin^2 x - 3\sin x - \cancel{9}}{3+\sin x} = -\frac{\sin^2 x + 3\sin x}{3+\sin x} = -\frac{\sin x(\cancel{\sin x+3})}{(\cancel{3+\sin x})} = -\sin x$

$\Rightarrow (3g-f)' = -\cos x \xRightarrow{x=\frac{5\pi}{3}} (3g-f)'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\cos\frac{5\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

۲

۵

اگر $f(x) = -\frac{۱}{\sqrt[۵]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{۱}{x^۵+|x^۵|}$ مقدار $g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))$ را بیابید.

★ $= f(g(\sqrt[5]{3}))'$

$f(g(x)) = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5+|x^5|} + \left|\frac{1}{x^5+|x^5|}\right|}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -x \Rightarrow (f\circ g)'(x) = -1$

$\Rightarrow (f\circ g)'(\sqrt[5]{3}) = -1$

۲

۶ اگر $f(x)=\left(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin}\right)^{۲}$ و $f(x)=xg(x)+۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ را بیابید.

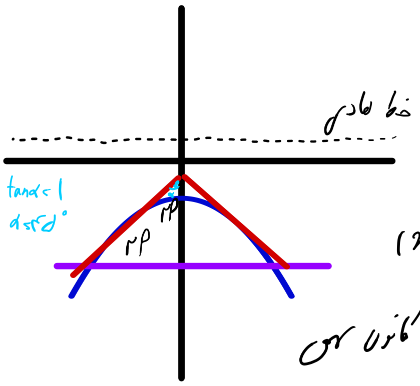
$f(x)=xg(x)+1 \Rightarrow g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2-1}{x} \xrightarrow[\text{هم ارزی}]{x\to 0} g(x)=\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-1}{x}=\frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}-1}{x}=\frac{\frac{-4x}{x^2+2x+1}}{x}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{-4x}{x^3+2x^2+x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x)=\frac{-4x}{x^3+2x^2+x}=\frac{0}{0} \xrightarrow{HoP} \frac{-4}{3x^2+4x+1}=\boxed{-4}$

۲

۷ خط d موازی محور xها، قرینه سهمی $y=x^{۲}+۱$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟



★ مطابق شکل فاصله خط d از مبدا مختصات در اصل همان فاصله کانون از مبدأ مختصات بوده پس با بدست آوردن عرض کانون سهمی فاصله خط d از مبدأ را بدست می‌آوریم.

$y=-x^2-1 \Rightarrow P=\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4} \Rightarrow$

★ فاصله رأس سهمی از خط هادی $=\frac{1}{4}$

★ فاصله کانون از خط هادی $2P$

$(x_r, y_r)=(0,-1) \Rightarrow$ خط هادی $\Rightarrow y=-\frac{3}{4}$

$(0,-\frac{5}{4})$ مختصات کانون سهمی $\Rightarrow$ خط $d \Rightarrow y=-\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{\left|-\frac{5}{4}\right|}=$ فاصله مبدا مختصات از خط d

۲

۸ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع $f(x)=۲\sqrt{x}\left(۴x^{۲}+۳\right)$ مماس است. شیب خط d را بیابید.

$f(x)=y_d \Rightarrow 2\sqrt{x}(4x^2+3)=\alpha x \Rightarrow 8x^2+6=\alpha\sqrt{x}$

$f'(x)=y'_d \Rightarrow 16x=\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \alpha=32x\sqrt{x} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 8x^2+6=32x^2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha=32\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{8\sqrt{2}}$

۲

۹ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-۲x^{۲}+x+۱}$ در نقطه‌ی A مماس است. عرض نقطه‌ی A را بیابید.

$y=\alpha x$

$\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}=\alpha x \Rightarrow -2x^2\sqrt{x}+x\sqrt{x}+\sqrt{x}=\frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\text{مشتق}} -5x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=0$

$\xrightarrow{\sqrt{x}} -5x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5} & \text{غ ق ق} \Leftarrow \text{زیر رادیکال منفی} \\ x=\frac{1}{2} & \checkmark \xrightarrow{\text{جایگذاری}} f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$

۲

۱۰ فرض کنید $f(x)=\left(x[x]\right)^{۳}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$، مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ چند برابر $-۴۸\sqrt{۵}$ است؟

$(f\circ g)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

$\Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{5}^-}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}}=\frac{1}{\frac{1}{2}^-}=\boxed{2^+}$

$\Rightarrow f'(2^+)=3\times[2^+]\times([2^+]\times 2)^2=\boxed{96}$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{2\times\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

$\Rightarrow (f\circ g)'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}\times 96=\boxed{48\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \frac{48\sqrt{5}}{-48\sqrt{5}}=\boxed{-1}$

۱٫۵

۱۰

$$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\sqrt{5})\left(\frac{5}{4}-1\right)^{-\frac{3}{2}} \longrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\cancel{2^{-2(-\frac{3}{2})}}\right) = -4\sqrt{5}$$

8

$$g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5^-}{4}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}^-}} = \frac{1}{\frac{1}{2}^-} = 2^+$$

$$f'(2^+) = ((2x)^3)' = 24x^2 = 24 \times 4$$

$$f\circ g'\left(\frac{\sqrt{5}^-}{2}\right) = -4\sqrt{5} \times 24 \times 4 \xrightarrow{\div -48\sqrt{5}} \frac{\cancel{24}^{\,2} \times \cancel{4} \times -4\sqrt{5}}{-\cancel{48}\sqrt{5}} = \boxed{8}$$