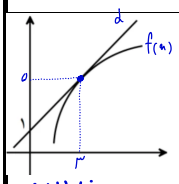
نام و نام خانوادگی ...آرویین خالقی زاده... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..... کلاس .....

۱

نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه‌ی (۳،۵) در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(۳)$ را بیابید.



$d = ax + 1$, $(0,1), (3,d)$ $\Rightarrow a = \frac{d-1}{3-0} = \frac{4}{3} \Rightarrow d = \frac{4}{3}x + 1 \Rightarrow d' = \frac{4}{3}$

در نقطه $(3,d)$ $f(3) = d(3)$, $f'(3) = d'(3)$ $\Rightarrow f'(3) = d' = \frac{4}{3}$

۲

خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{ax-1}$ در نقطه‌ی A از نقاط $(-1,1)$ و $(2,2)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ را بیابید.

$a = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$ (شیب) $\Rightarrow y = \frac{x+4}{3}$ $\Rightarrow 3\sqrt{ax-1} = x+4 \Rightarrow 9ax-9 = x^2+8x+16 \Rightarrow x^2 + (8-9a)x + 25 = 0$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

در یک نقطه مماس شده است پس دلتا صفر است $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (8-9a)^2 - 100 = 0 \Rightarrow$

- $a = 2 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow f(5) = \sqrt{10-1} = 3$
- $a = -\frac{2}{9}$ غ ق ق

۳

معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^2+mx+1}{x+3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $y = 4x - 3$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟

$y = \frac{3x+n}{4} \Rightarrow y' = \frac{3}{4}$ (۱) $\qquad y' = \frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2}$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3(x+3)^2 = 4x^2 + 24x + 12m - 4 \Rightarrow m = 2$ (۱)

$y = \frac{x^2+2x+1}{x+3} = \frac{3x+n}{4}$

$x = 1 \Rightarrow \frac{4}{4} = \frac{n+3}{4} \Rightarrow n = 1$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow m+n = 3$

۴

اگر $f(x) = \frac{7-\sin^2 x}{9-\sin^2 x}$ و $g(x) = \frac{3}{3+\sin x}$ باشد، حاصل عبارت $3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ را بیابید.

$\frac{7-\sin^2 x}{9-\sin^2 x} \cdot \frac{(3-\sin x)(9+3\sin x+\sin^2 x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)} = \frac{\sin^2 x + 3\sin x + 9}{3+\sin x} \Rightarrow 3g(x) - f(x) = \frac{-\sin^2 x - 3\sin x - 9}{3+\sin x} = -\frac{\sin^2 x + 3\sin x}{3+\sin x} = -\frac{\sin x(\sin x+3)}{(\sin x+3)} = -\sin x$

$\Rightarrow (3g-f)' = -\cos x \xrightarrow{x = \frac{5\pi}{3}} (3g-f)'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\cos\frac{5\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

۵

اگر $f(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5+|x^5|}$ مقدار $(f\circ g)'\left(\sqrt[5]{3}\right)$ را بیابید.

$(f(g(x^5)))'$

$f(g(x)) = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5+|x^5|} + \left|\frac{1}{x^5+|x^5|}\right|}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}} = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -x \Rightarrow (f\circ g)'(x) = -1$

$\Rightarrow f\circ g\left(\sqrt[5]{3}\right) = -1$

Created with Notewise

۶

اگر $f(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin}\right)^2$ و $f(x)=xg(x)+1$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 0} g(x)$ را بیابید.

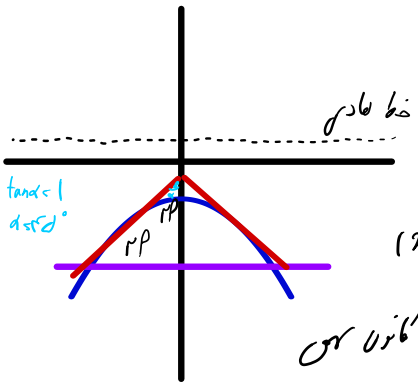
$f(x)=xg(x)+1 \Rightarrow g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2-1}{x} \xrightarrow{x\to 0} g(x)=\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-1}{x}=\frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}-1}{x}=\frac{-4x}{x^2+2x+1}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{-4x}{x^3+2x^2+x} \xrightarrow{x\to 0} \lim g(x)=\frac{-4x}{x^3+2x^2+x}=\frac{0}{0} \overset{H.P}{\Rightarrow} \frac{-4}{3x^2+4x+1}=-4$

۷

خط d موازی محور xها، قرینه سهمی $y=x^2+1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟



★ مطابق شکل فاصله خط d از مبدأ مختصات در این مثال همان فاصله کانون از مبدأ مختصات بوده پس با به دست آوردن عرض کانون همین فاصله خط d از مبدأ را به دست می‌آوریم.

$y=-x^2+1 \Rightarrow p=\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4} \Rightarrow$

★ فاصله کانون تا خط هادی $=\frac{1}{4}$

★ فاصله کانون از خط هادی $2p$

$(x_1,y_1)=(0,-1)$ روی خط هادی $\Rightarrow y=-\frac{3}{4}$

کانون روی $(0,\frac{5}{4})$ و خط d به $y=-\frac{5}{4} \Rightarrow$ فاصله مبدأ مختصات از خط $d=\frac{5}{4}$

۸

خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع $f(x)=2\sqrt{x}\left(4x^2+3\right)$ مماس است. شیب خط d را بیابید.

$\rightarrow \begin{cases} f(x)=y_d \Rightarrow 2\sqrt{x}(4x^2+3)=\alpha x \Rightarrow 8x^2+6=\alpha\sqrt{x} \\ f'(x)=y'_d \Rightarrow 16x=\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \alpha=32x\sqrt{x} \end{cases}$ جایگذاری $\Rightarrow 8x^2+6=32x^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=32\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$

۹

خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}$ در نقطه‌ی A مماس است. عرض نقطه‌ی A را بیابید.

$y=\alpha x$

$\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}=\alpha x \Rightarrow -2x^2\sqrt{x}+x\sqrt{x}+\sqrt{x}=\frac{1}{\alpha}$ مشتق $\Rightarrow -5x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=0$

$\times\sqrt{x} \rightarrow -5x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5} \text{ ق ق} \Rightarrow \text{زیر رادیکال منفی} \\ x=\frac{1}{2} \checkmark \text{جایگذاری} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

۱۰

فرض کنید $f(x)=[x]^2$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$، مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $-48\sqrt{5}$ است؟

$(f\circ g)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

$\Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}^-\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2^+$

$\Rightarrow f'(2^+)=2\times[2^+]\times([2^+]\times 2)^2=16$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{2\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\rightarrow (f\circ g)'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}\times 16=8\sqrt{5}$

$\rightarrow \frac{8\sqrt{5}}{-48\sqrt{5}}=-1$

Created with Notewise