صبح عالی — به نام آنکه ... — دوازده شنبه ۲۴

۱۸/۵

(۱) $d \parallel y = ax+b \xrightarrow{b=1} y = ax+1 \rightarrow f'(x) = \frac{x}{2}$

$\rightarrow \left|\frac{3}{a}\right| \rightarrow a = 3a+1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$ ✓

(۲) $m = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{x}{3}+b \rightarrow 1 = -\frac{1}{3}+b \rightarrow b = \frac{4}{3}$

$y = \frac{x}{3}+\frac{4}{3}$

$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = \sqrt{ax-1} \rightarrow x+4 = 3\sqrt{ax-1}$

$-\frac{1}{3} = \frac{a}{2\sqrt{ax-1}} \rightarrow x^2 + (8-9a)x + 2a = 0$

$\Delta = 0$

$(8-9a)^2 = 100 \rightarrow a = 2 \rightarrow f(x) = x^2$ ✓

(۳) $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$, $f'(x) = \frac{(2x+m)(x+3) - (x^2+mx+1)}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2}$

$x=1 \rightarrow \frac{7+3m}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow m = 2, n = 1 \rightarrow m+n = 3$ ✓

(۴) $g'(x) = \frac{-3\cos x}{(3+\sin x)^2}$, $f'(x) = \cos x - \frac{9\cos x}{(\sin x+3)^2} \Rightarrow 3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$\frac{-27 + 20\sqrt{3}}{121}$ (۱/۲)

(۵) $(f \circ g)'(x) = ? \rightarrow f \circ g = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5+1} + \left|\frac{1}{x^5+\sqrt{x^5}}\right|}} = -x$

$\rightarrow (f \circ g)'(x) = -1$

(۶) $g(x) = \frac{\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^2 - 1}{x}$ ✓

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^2 - 1}{x} \xrightarrow{\text{Hop}} 2\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)\left(\frac{2\cos x}{(\sin x+1)^2}\right) = -2$

۱ ✓

۸) $d: ax+b$ خط مماس، $b=0$ ⇒ $f(x)=ax$ خط، $f'(x)=a$

$۲\sqrt{ax}\left(\frac{۴x^۲+۳}{x}\right)=ax \rightarrow \left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{۴x^۲+۳}{x}\right)+(۲\sqrt{x})(۸x)=a=\frac{۲۰x^۲+۳}{\sqrt{x}}$

$(۲\sqrt{x})\left(\frac{۴x^۲+۳}{x}\right)=x\left(\frac{۲۰x^۲+۳}{\sqrt{x}}\right) \rightarrow ۸x^۲+۶=۲۰x^۲+۳-۱۶x^۲-۳=۰$ ② $\rightarrow x=\frac{۱}{۲}$ ✓ ، $x=-\frac{۱}{۲}$ ✗

$a=۸\sqrt{۲}$

۹) $d: ax+b$ خط مماس، $b=۰$ ⇒ $f(x)=ax \rightarrow f'(x)=a$

$\frac{\sqrt{x}}{-۲x^۲+x+۱}=ax$ ، $a=\frac{۹x^۲-x+۱}{(۲\sqrt{x})(-۲x^۲+x+۱)^۲} \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{-۲x^۲+x+۱}=\left(\frac{x}{۲\sqrt{x}}\right)\left(\frac{۹x^۲-x+۱}{(-۲x^۲+x+۱)^۲}\right)$

$\rightarrow ۹x^۲-x+۱=-۲x^۲+۲x+۲$ ③ $\rightarrow x=\frac{۱}{۴}$ ✓ ، $x=-\frac{۱}{۵}$ ✗ $\Rightarrow f(A)=f(\frac{۱}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰) $Lay=\left(\left(\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\right)\left[\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\right]\right)^۳ \rightarrow Lay'(x)=g'(x)\times f'(g(x))=$ ۱۰/۱

$x\to\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\frac{\sqrt{(۹x^۲-۱)^۳}}{x}\times ۹x\times\frac{\sqrt{(۹x^۲-۱)^۳}}{x}\times\left(\frac{۲}{\sqrt{x^۲-۱}}\right)^۲=\frac{۲۷(۹x^۲-۱)^۲}{x^۲}=۲۷\times\frac{۲۵}{۱۸}\times\frac{۱}{۱۸}=\frac{۷۵}{۱۲}$

$\frac{۷۵}{-۲۷\sqrt{۵}}=\frac{۱}{-۴\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{-۲۰}$

۷) $a_{n+1}=-x^۲-۱$ ، $\frac{-۱}{a}a_{n-1}=-x^۲-۱$ ، $a_{n-1}=-x^۲-۱$ $\rightarrow a=-x^۲$ ، $a_n=-۱$ ۱۰/۲

$a_n=۱$ ، a_{n-1} ، $-x-۱$ $\rightarrow -x-۱=-x^۲-۱$ $\rightarrow a_n=x^۲$ $\rightarrow a_n=۱$

$x^۲=۱ \rightarrow x=۱$ $\rightarrow y=-۲$ ۱۰/۳

۶

$$3g - f(x) = \frac{9}{3+\sin x} - \frac{(3-\sin x)(9+\sin^2 x+3\sin x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)} = \frac{-\sin(\sin x+3)}{\sin x+3}$$

$\hookrightarrow -\sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} (3g-f)'(x) = -\cos x \rightsquigarrow -\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

۷

$y = x^2 - 1 \xrightarrow[\text{نسبت به مبدأ}]{\text{قرینه}} y_1 = -x^2 - 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y_1' = -2x$

$m_{l_1} = -2(-\alpha) = 2\alpha$
$m_{l_2} = -2(\alpha) = -2\alpha$
$\xrightarrow{\text{عمود}} -4\alpha^2 = -1 \rightsquigarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}$

۲ خط را l_1 و l_2 در نظر می‌گیریم:

۲ نقطه $\rightarrow A(-\frac{1}{2}, \beta)$ $B(\frac{1}{2}, \beta)$ $\xrightarrow[\text{از هم}]{\text{فاصله}} |-(-\frac{1}{2})^2 - 1| = |\frac{-5}{4}| = 1.25$

۱۰

$$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$g'\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = -\frac{1}{2}(\sqrt{5})\left(\frac{5}{4}-1\right)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{-2(-\frac{3}{2})}{1}\right) = -4\sqrt{5}$$

$$g\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}^-\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}^- - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}^-}} = \frac{1}{\frac{1}{2}^-} = 2^+$$

$$f'(2^+) = (4x^3)' = 12x^2 = 12\times 4$$

$$4\log'\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}^-\right) = -4\sqrt{5}\times 12\times 4 \xrightarrow{\div -48\sqrt{5}} \frac{12\times 4\times 4 - 4\sqrt{5}}{-4\sqrt{5}} = 1$$