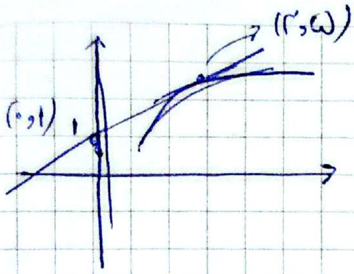
۱۶

آرین غضنفری سواد کوهی

۱-



خط گذرنده و مماس بر (۳,۵) ← (۳,۵)

$y = \frac{4}{3}x + 1$ $\quad f'(3) = \frac{4}{3}$ ✓ ②

۲-

خط مماس ⇒ $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ $\quad \sqrt{9x-1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ → $x^2 + (8-81)x + 25 = 0$ → $\Delta = 0$

$x = -\frac{4}{3}$ ← تعریف نمی‌شود

$\sqrt{2x-1} = 3$ ← $n = 2$

$x = 5$

①

۳-

$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 2}$ $\xrightarrow[f(1)=\frac{4}{3}]{x=1}$ $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3x - 1}{(x+3)^2} = \frac{3x+6}{16} = \frac{3}{4}$ ⇒ $x = 2$ → $f(1) = 1$

$4y - 3x = n$

↳ $y = \frac{3x + n}{4}$ $\quad \frac{3 - n}{4} = 1$ $\quad n = 1$ $\quad m + n = 3$ ✓ ②

۴-

$(3g' - f')(\frac{5}{4}\pi)$ $\quad f(x) = \frac{(3 - \sin x)(9 + \sin^2 x + 3\sin x)}{(3 - \sin x)(3 + \sin x)}$ ⇒ $f'(x) = \frac{\sin^2 x\cos x + 6\sin x\cos x}{(3+\sin x)^2}$

$g'(x) = \frac{-3\cos x}{(3 + \sin x)^2}$

$(3g' - f')(\frac{5}{4}\pi) = \frac{-9\cos x - \sin^2 x\cos x - 6\sin x\cos x}{(3 + \sin^2 x)^2} = \frac{-6/5 - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{4}{3}\sqrt{2}}{(6 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}$

۱/۵

۵-

$g'(\sqrt{2})f'(g(\sqrt{2})) = (fog)'(\sqrt{2})$ → $fog = \frac{-1}{5\sqrt{2(\frac{1}{2x^5})}} = -x$ → $(fog)'(\sqrt{2}) = -1$ ✓ ②

۶-

$f(x) = xg(x) + 1$ $\quad g(x) = \frac{f(x) - 1}{x} = \left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^3 - 1$

$\lim_{x \to 0} g(x) \overset{hop}{=} 3\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2\left(\frac{\cos x(1 + \sin x) - \cos x(-1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2}\right) = 3(-1)(1+1) = -6$ ✓ ②

۷-

$x^2+1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به}} -x^2+4$, $f'(x)=-2x$

$f'(x)\, f'(-x) = -1$ ($x>0$)

$-2x \times 2x = -1$, $x^2=\frac{1}{4}$, $x=\pm\frac{1}{2}$ → منفی پذیرفته نیست

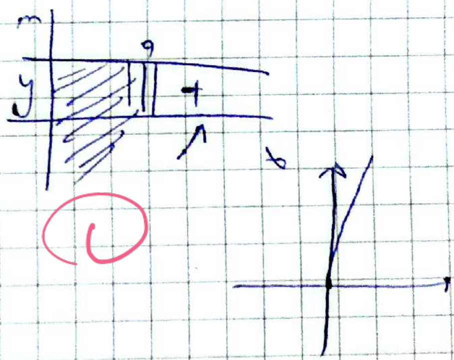
$d: y=-\frac{5}{4}$ $1{,}25 \Leftarrow$ فاصله خط

۲

۸-

$f(x)=2\sqrt{x}(4x^2+3)$ $f'(x)=2\left(\frac{12x^2+3}{2\sqrt{x}}\right)$

$f'(0)$ = می‌شود ← شیب خط $+\infty$



۱

۹-

$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x-1}$ ، $f'(x)=\frac{+6x^2-x+1}{(-2x^2+x-1)^2}=-1$

f $(0,0)$ ← در این نقطه مشتق‌پذیر است

نقطه مبدأ مختصات است

$y=0$

۲

۱۰-

$\log(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right]\right)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\right)^3 \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{6}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{6\sqrt{x^2-1}}{2x}$

$\lim_{x\to\frac{\sqrt{5}}{2}} \log(x) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=2$

$\frac{6}{x}=\frac{12}{\sqrt{5}}$ $\frac{\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{-28\sqrt{5}} = -\frac{1}{15}$

۱٫۵

$(x^2+y^2-1)^3-x^2y^3=0$

♡ :)

iman NOTE BOOK

۲

$m = \frac{۲-۱}{۲+۱} = \frac{۱}{۳} \rightsquigarrow f'(x) = \frac{a}{۲\sqrt{ax-۱}} = \frac{۱}{۳} \rightsquigarrow ۳a = ۲\sqrt{ax-۱}$

مماس = $y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳} \rightsquigarrow x+۴ = ۳\sqrt{ax-۱} \rightsquigarrow x+۴ = \frac{۳a}{۲}(۳) = \frac{۹a}{۲}$

$x = ۴/۵a - ۴ \rightsquigarrow ۴/۵a - ۴ + ۴ = ۳\sqrt{a(۴/۵a-۴)-۱} \rightsquigarrow ۹a^۲ - ۱۶a - ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۲ ✓$

یا $a = -\frac{۲}{۹}$ ✗

$f(۵) = \sqrt{۱۰-۱} = \sqrt{۹} = ۳$

۴

$۳g - f(x) = \frac{۹}{۳+\sin x} - \frac{(۳-\sin x)(۹+\sin^۲ x+۳\sin x)}{(۳-\sin x)(۳+\sin x)} = \frac{-\sin x(\sin x+۳)}{\sin x+۳}$

یا $-\sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} (۳g-f)'(x) = -\cos x \rightsquigarrow -\cos(\frac{۴\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲}$

۸

$f(x) = ۸x^{\frac{۵}{۲}} + ۹x^{\frac{۱}{۲}} \longrightarrow f'(x) = ۲۰x^{\frac{۳}{۲}} + ۳x^{-\frac{۱}{۲}}$

معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $x=a$ برابر است با:

$y - ۲\sqrt{a}(۴a^۲+۳) = \frac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}}(x-a)$

$x, y = ۰ \rightsquigarrow -۲\sqrt{a}(۴a^۲+۳) = \frac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}}(-a) \rightsquigarrow ۲a(۴a^۲+۳) = ۲۰a^۲+۳(a)$

$۸a^۲ + ۶ = ۲۰a^۲ + ۳ \longrightarrow ۱۲a^۲ = ۳ \longrightarrow a = \pm\frac{۱}{۲} \rightsquigarrow a > ۰ \rightsquigarrow a = \frac{۱}{۲}$

$m = ۲۰(۲^{-۱ \times \frac{۳}{۲}}) + ۳(۲^{-۱(-\frac{۱}{۲})}) = ۸\sqrt{۲}$

۹

$y = mx \rightarrow \dfrac{\sqrt{a}}{-2a^2+a+1} = ma \rightarrow \dfrac{1}{-2a^2+a+1} = m\sqrt{a}$

$m\sqrt{a}(-2a^2+a+1) = 1 \rightarrow -2m(a^{\frac{5}{2}}) + m(a^{\frac{3}{2}}) + m(a)^{\frac{1}{2}} = 1$ مشتق $\rightsquigarrow$

$-5m(a^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{2}m(a^{\frac{1}{2}}) + \frac{m}{2}(a^{-\frac{1}{2}}) = 0$

$\frac{m}{2}(a^{-\frac{1}{2}})(-10a^2+3a+1) = 0 \rightsquigarrow a = -\frac{1}{5}$ یا $a = \frac{1}{2}$ ✓ $(a>0)$

$f(a) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+1} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

۱۰

$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$

$g'(\frac{\sqrt{5}}{2}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{5})(\frac{5}{4}-1)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2}(\cancel{4^{-2(-\frac{3}{2})}}\ 8) = -4\sqrt{5}$

$g(\frac{\sqrt{5}}{2}^-) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5^-}{4}-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}^-}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}^-} = 2^+$

$f'(2^+) = ((2x)^3)' = 24x^2 = 24 \times 4$

$fog'(\frac{\sqrt{5}^-}{2}) = -4\sqrt{5} \times 24 \times 4 \xrightarrow{\div -48\sqrt{5}} \dfrac{\cancel{24}^{\,2} \times \cancel{4} \times -4\sqrt{5}}{-\cancel{48}\sqrt{5}} = \boxed{8}$