۱۸,۲۵

Year Month Day — Subject:

تألیف شماره ۲۵

« پیمانه خدا » — « به کیوان مکار سپرد »

$-\sqrt{3} = x$ در بازه‌ی $[-3, 1]$ قرار ندارد

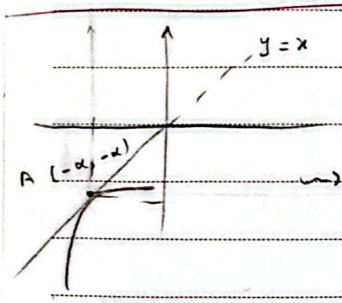
پس $x = \sqrt{3}$ تنها قابل قبول است!

$$f'(x) = \frac{+a}{x^2} \rightsquigarrow \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{a}{x^2} \rightsquigarrow \frac{\left(1 - \frac{a}{3}\right) - (1 - a)}{2} = \frac{a}{x^2} \quad (1,5)$$

$$\rightarrow \frac{2 - \frac{a}{3} - 1 + a}{2} = \frac{a}{x^2} \rightsquigarrow \frac{a}{3} = \frac{a}{x^2} \rightsquigarrow x^2 = 3 \rightsquigarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

---

(۲)



$$① \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - 5x + 18a \\ y = x \end{cases} \rightarrow f(A) = y(A)$$

$$A(-\alpha, -\alpha)$$

$$② \begin{cases} f'(x) = 4ax - 5 \\ y' = 1 \end{cases} \rightsquigarrow 4a(-\alpha) - 5 = 1 \quad (II)$$

$$\rightarrow -4a\alpha = 6 \rightsquigarrow \boxed{a\alpha = -\frac{3}{2}}$$

$$2a(-\alpha)^2 - 5(-\alpha) + 18a = -\alpha \rightsquigarrow 2a\alpha^2 + 6\alpha + 18a = 0 \quad (I)$$

$$\rightarrow 2(a\alpha)\alpha + 6\alpha + 18\left(\frac{-3}{2a}\right) = 0 \rightsquigarrow 2\left(-\frac{3}{2}\right)\alpha + 6\alpha - \frac{27}{\alpha} = 0$$

$$-3\alpha + 6\alpha - \frac{27}{\alpha} = 0 \rightsquigarrow \frac{27}{\alpha} = 3\alpha \rightsquigarrow \alpha^2 = 9 \xrightarrow[\text{ق ص سمع}]{\alpha > 0} \boxed{-\alpha = -3}$$

$$\rightarrow a = -\frac{3}{2 \times 3} = \boxed{-\frac{1}{2}} \quad (2)$$

---

(۳)

$$y = x^3 - 12x + 2 \rightsquigarrow y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \xrightarrow{y'} \begin{array}{ccccc} & -2 & & 2 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

x	-2		2	
y'	$+$	$-$	$+$	
y	↗	↘	↗	

$\rightarrow$ نقطه‌ی min

$$\rightsquigarrow f(2) = 2^3 - 12(2) + 2 = 8 - 24 + 2 = \boxed{-14} \quad (2)$$

---

(۴)

$$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4 \xrightarrow{y'} f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2b$$

ext $\rightsquigarrow f'(-2) = 0$, $f(0) = 0$ نقطه‌ی

$$\rightsquigarrow f'(-2) = 3(-2)^2 + 2a(-2) - 2b = 0$$

$$\rightsquigarrow 12 - 4a - 2b = 0 \rightsquigarrow 2a + b = 6 \quad (1)$$

$$f'(0) = 0 \rightsquigarrow -2b = 0 \rightarrow \boxed{b = 0} \xrightarrow{(1)} \boxed{a = 3} \rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$\rightsquigarrow f(-2) = -8 + 12 - 4 = 0 \rightsquigarrow [-2, 0]$$

$$\rightsquigarrow f(0) = -4 \rightsquigarrow [-4, 0]$$

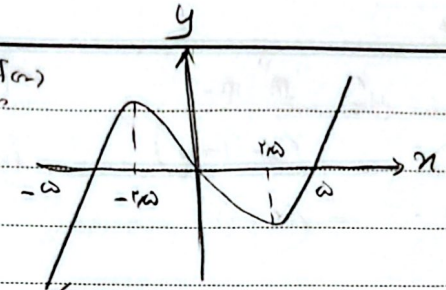
$$\text{طول} \rightsquigarrow \sqrt{(0+2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \boxed{2\sqrt{5}}$$

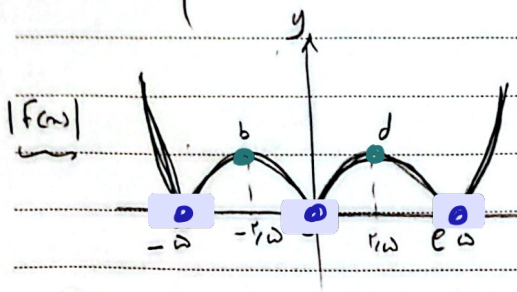
(3)

Year Month Day Subject:

۵) ۱/۷۵

$f(x)=\begin{cases} x^2-3x & x>0 \\ x^2+3x & x<0 \end{cases}$





$|f(x)|$ ←

تعداد نقاط Max نسبی: $m=$ ② ← b, d و ۲ تا مطابق شکل

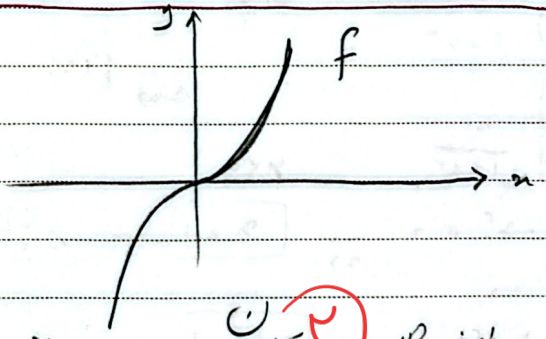
تعداد نقاط Min نسبی: $n=$ ③ ← a, c و e

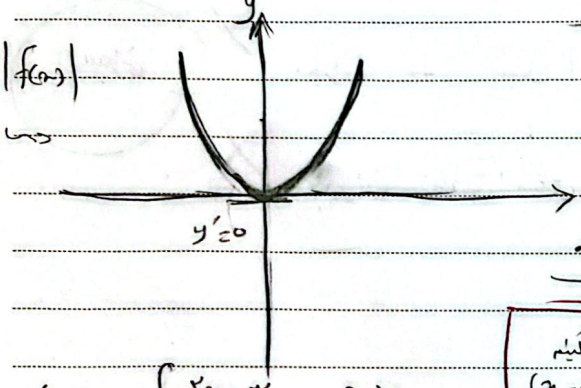
$\frac{m}{n}=\frac{2}{3}=$ (۱) ✓

دقت کن!

۶)

$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\geq 0 \\ -x^2+2x & x<0 \end{cases}$ ⇝ f





$|f(x)|$ ←

این تابع با دامنه $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و ۲ نقطه بحرانی دارد.

در همسایگی صفر، منحنی بالا است و نقطه عطف ندارد.

۷)

فرض می‌کنیم $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-a)$ ⇐ $(x-a)\geq 0$

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-a)=x^{\frac{5}{3}}-ax^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=$

$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & x>0 \\ -2x+2 & x<0 \end{cases}$

$\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5-2ax)=0$ ⇐ $5-2ax=0 \Rightarrow 2ax=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2a}$

۱/۵

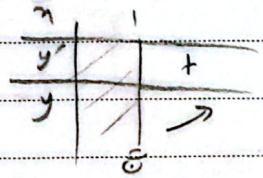
$f(\frac{5}{2a})=\frac{3}{4}$ ⇐ $\sqrt[3]{\frac{25}{4a^2}}(\frac{5}{2a}-\frac{2a}{2a})=\frac{3}{4}$

۸)

طبق دامنه زیر را دلال داریم:

$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-x} & x\geq 1 \\ \sqrt{-x^2-x} & -1\leq x\leq 0 \end{cases}$

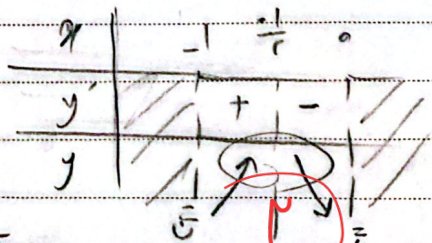
$f'(x)=\begin{cases} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & x>1 \\ \frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}} & -1<x<0 \end{cases}$



$\frac{4}{2}\frac{0+(1)3}{4}$

$=\frac{3}{4}$

$=1$ ✓



۲

$x=0$ و $x=-\frac{1}{2}$ و $x=-1$ و $x=1$ ← بحرانی

$x=-\frac{1}{2}$ ← Max نسبی

$m=1$ ← $K=4$

$n=0$ ← Min نسبی ندارد.

Farhang Gostar

Year Month Day Subject:

$y = \frac{mx+2}{x-1+m} \rightarrow y' = \frac{m^2-m-2}{(x-(1-m))^2} = \frac{(m+1)(m-2)}{(x-(1-m))^2}$ ① $x=1 \rightarrow y'=0$ (9)

$(1-(1-m))^2 = 0 \rightarrow m=0$

(12)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} & x > 0 \\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$ (13)

(2,15)

① $1-x^2=0 \xrightarrow{x>0} x=1$ مشتق نابذیر ← بحرانی

② $1-x^2=0 \xrightarrow{x<0} x=-1$ مشتق برابر صفر ← بحرانی

③ $1+x^2=0$ همواره مثبت ← ✗

← ۲ تا بحرانی

۷

$x \in [0,a] \rightarrow |x-a| = -(x-a) \rightsquigarrow f(x) = -\sqrt[3]{x^2}(x-a)$

$= -x^{\frac{5}{3}} + a(x^{\frac{2}{3}}) \rightsquigarrow f'(x) = -\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}a(x^{-\frac{1}{3}})$

$-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x - 2a) \rightsquigarrow f'(x)$ ⌐ $x = 0$

⌙ $x = \frac{2a}{5}$ ✓ max $\rightarrow f(\frac{2a}{5}) = 1.5$

$\sqrt[3]{\frac{2a}{5}}\left|\frac{2a}{5} - a\right| = \frac{3}{2} \rightsquigarrow a^3 \times \frac{4a^2}{25} = \frac{125}{8} \rightsquigarrow a^5 = \frac{5^5}{2^5} \rightarrow \boxed{a = 2.5}$

۹

$f'(x) < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 2$, $x \neq 2$ $\rightsquigarrow$ (1) $-1 \leq x < 2$

x (ریشه‌ی مخرج) $\rightarrow 1 - x \leq 1 \rightarrow$ (2) $x \geq 0$

$1, 2 \rightsquigarrow \boxed{x = 0 \text{ یا } 1}$

۱۰

$$y = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \quad (x \neq 1) \rightsquigarrow D_y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1-x^2+2x^2}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} & x > 0 \\ \frac{1+x^2-2x^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = -1}$$

تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر است و مشتق در آن صفر نیست پس تنها یک نقطه‌ی بحرانی $x = -1$ دارد.