به نام خدا
سامان نژادکرد

تکلیف ۲۶ — ۱۲ تجربی B — ۲۰ آفرین خیلی عالی نوشتی!

۱-

$$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}=\begin{cases}\sqrt{x-x^2} & x\geq 0\\ \sqrt{+x^2+x} & x<0\end{cases}$$

0		1	
−	+	−	

$\to 0\leq x\leq 1$

−1		0	
+	−	+	

$x\leq -1$

$\to D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & x\geq 0 \to x=\frac{1}{2},\ x=0,\ x=1\\[2mm] \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x<0\end{cases}$$

$\to x=-\frac{1}{2}$ ✗ در دامنه نیست

$x=0$ ✗ در خود تابع باید لحاظ شود

$x=-1$ لحاظ شد

x		−1		0		$\frac{1}{2}$		1	
y'	−		(هاشور)		+		−		(هاشور)
y	↘				↗		↘		
		بحرانی		بحرانی		max بحرانی		بحرانی	

$m=1,\ n=0 \quad k=4 \to k+m+n=5$ ✓

۲-

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x} \to f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{-2}{2\sqrt{a-2x}}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{a-2x}} \to 2\sqrt{x}=\sqrt{a-2x} \to 4x=a-2x$

$\to a=6x \Rightarrow x=\frac{a}{6}$

چون مشتق برای نقطه صفر را نشان داد پس نقطه دیگر بحرانی، نقاط انتهایی بازه بوده است.

$D_f:\ x\geq 0,\ a-2x\geq 0 \to \frac{a}{2}\geq x \quad \{\ \frac{a}{2}\geq x\geq 0$

$x=\frac{a}{6} \to f(x)=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{4a}{6}}$ → max $\quad x=\frac{a}{2} \to f(x)=\sqrt{\frac{a}{2}} \to$ min

$x=0 \to f(x)=\sqrt{a}$

$$\Rightarrow \sqrt{12} = \sqrt{\frac{a}{4}} \times \Big(\underbrace{\sqrt{\frac{4a}{3}} + \sqrt{\frac{a}{3}}}_{2\sqrt{\frac{a}{3}}} \Big) \Rightarrow \sqrt{12} = 3\sqrt{\frac{a}{3}} \times \sqrt{\frac{a}{4}} \rightarrow \sqrt{12} = 3\sqrt{\frac{a^2}{12}}$$

$$\rightarrow 12 = 9 \times \frac{a^2}{12} \Rightarrow a^2 = \frac{12 \times 12}{9} = 16 \Rightarrow a = \begin{cases} +4 \ ✓ \\ -4 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [a] = \{4, \cancel{4}\}$$ (2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) & x \geq 2, \ x \leq -2 \\ -\frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) & -2 < x < 2 \end{cases}$$

-2

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - 2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} & x \geq 2, \ x \leq -2 \\ \frac{2x(x^4-4x^2) - (4x^3-8x)(x^2-1)}{(x^2-1)^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$

$$\Rightarrow (4x^3-8x)(x^2-1) = 2x(x^4-4x^2) \rightarrow 4x^5 - 12x^3 + 8x = 2x^3(x^2-4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^4 - 12x^2 + 8 = 2x^4 - 8x^2 \rightarrow 2x^4 - 4x^2 + 8 = 0 \rightarrow x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 < 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow f'(x) = 0$$

x		-2		0		2	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
y	↘		↗		↘		↗
		ext		ext		ext	

(2) تعداد ext ۳ ✓

۴-

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

نقاط A و B باید در ضابطه تابع صدق کنند $\Rightarrow$

$A: x=0 \to y=0 = d$

$B: x=1 \to y=1 = a+b+c+d \Rightarrow a+b+c=1$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

حال نقاط A و B باید ریشه های ضابطه مشتق باشند (تابع پیوسته و در تمام نقاط مشتق پذیر است)

$\Rightarrow x=0 \to y'=0 = c$

$\Rightarrow x=1 \Rightarrow y'=0 = 3a+2b+c \to 3a+2b=0$

$\begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ a+b+c=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \quad a=-2,\ b=3 \Rightarrow ab=-6$

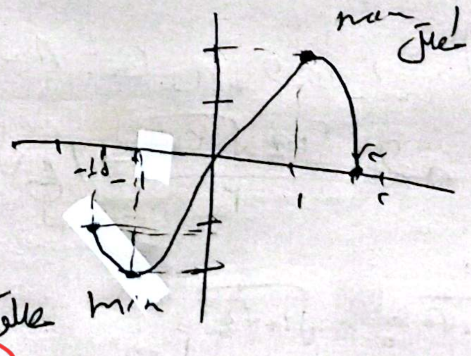
[۲]

۵- در بازه مورد نظر عبارت درون قدر مطلق (+) است پس قدر مطلق را برمیداریم:

$x \in [-1.5, \sqrt{3}] \to |3x - x^3| = 3x - x^3 \to f(x) = 3x - x^3$

$f'(x) = 3 - 3x^2 \to f'(x)=0 \to 3-3x^2=0 \to x=\pm 1$

x	-1.5	-1	1	$\sqrt{3}$
y'	−	+	−	
y	$-\frac{9}{8}$ ↘	-2 ↗	2 ↘	0



min مطلق

[۲]

min مطلق برابر (-2) است (در نقطه $x=-1$)

-۶

$y = x^2|x| + 3ax^2 + b$

نقطه مورد نظر باید در ضابطه تابع صدق کند داریم:

$A(-1,1) \to x=-1, y=1 \to 1+3a+b=1 \to 3a+b=0$ I

چون نقطه مورد نظر اکسترمم نسبی است پس باید طول نقطه مورد نظر در ریشه مشتق صدق کند (البته با تعیین علامت) :

$x=-1 \to |x| = -x$ ☆

$y = -x^3 + 3ax^2 + b \to y' = -3x^2 + 6ax$

$\to x=-1 \to y' = -3 - 6a = 0 \to a = -\frac{1}{2} \xrightarrow{I} b = +\frac{3}{2}$

$\to \frac{b}{a} = \frac{+1.5}{-0.5} = -3$ ۲

-۷

$y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{3} \to y' = 3x + 1$

x		$-\frac{1}{3}$	
y'	$-$		$+$
y	↘	min	↗

نقطه min $\Rightarrow A(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$\to y = \frac{2}{3}$ مجانب افقی

$x = -\frac{1}{3}$ مجانب قائم

$y = \frac{ax + 2}{(a+1)x + (a-1)} \to$ ریشه مخرج (مجانب قائم) $= -\frac{a-1}{a+1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2a - 2 = a + 1 \to a = 3$

$y = \frac{3x + 2}{3x + 1} \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{تقاطع با}} y = 0 \to 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ ۲

طول نقطه $-\frac{2}{3}$ است

-۸

$A(-\frac{1}{2}, 3) \to y = 3$ مجانب افقی

مجانب قائم $x = -\frac{1}{2}$

جواب تست ۴ : ریشه مشترک : $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4(-\frac{1}{2})^3 + a(-\frac{1}{2}) + 1 = 0$

$\Rightarrow a = 4$

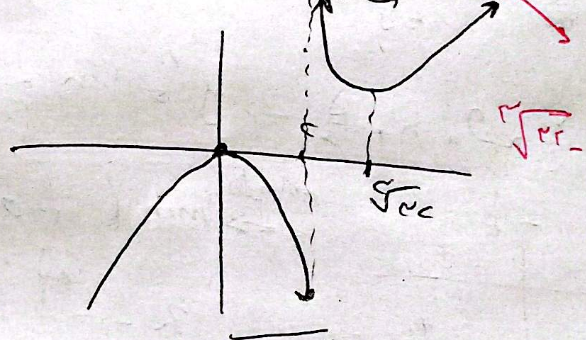
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1} = \frac{b}{4} = 3 \Rightarrow b = 12$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = 3$ ③

۹ـ $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^3-8) - (3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}$

$= \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3-8)^2} = \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2} = \frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$

x		0		2		$\sqrt[3]{32}$	
y'	+		−		−		+
y	↗		↘		↘		↗



طول : $\sqrt[3]{32} - 2$

$\sqrt[3]{32} - 2 < 2$

اکیداً نزولی و طول ۲

② $\sqrt[3]{32} - 2$ = طول بازه min

۱۰ـ $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^2-3) - 2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}$

$= \frac{4x^5 - 12x^3 - 2x^5 + 6x}{(x^2-3)^2} = \frac{2x^5 - 12x^3 + 6x}{(x^2-3)^2} = \frac{x(2x^4 - 12x^2 + 6)}{(x^2-3)^2}$

x		$-\sqrt{3+\sqrt{3}}$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{3}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3+\sqrt{3}}$	
y'	+		+		−		+		−		−		+		
y	↗		↗		↘		↗		↘		↘				

۳ بازه اکیداً نزولی داریم ②

$(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$\cup (\sqrt{3}, 2)$