بنام خدا
ماهان نژادکرد

تکلیف ۲۶ ۱۲ تجربی B

۱-

$$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}=\begin{cases}\sqrt{x-x^2} & x\geq 0\\ \sqrt{+x^2+x} & x<0\end{cases}$$

	0		1	
−		+		−

$\to 0\leq x\leq 1$

	−1		0	
+		−		+

$x\leq -1$

$\to D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & x\geq 0 \to x=\frac{1}{2}\\ & x=0\\ & x=1\\ \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x<0\end{cases}$$

$\to x=-\frac{1}{2}$ ✗ در دامنه نیست

$x=0$ ✗ در نقطه انتهایی بازه لحاظ شد

$x=-1$

x		−1		0		$\frac{1}{2}$		1	
y'	−				+		−		
y	↘				↗		↘		
		بحرانی		بحرانی		max بحرانی		بحرانی	

$m=1\ ,\ n=0\quad k=4\to k+m+n=5$

۲-

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}\to f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{-2}{2\sqrt{a-2x}}$

$\Rightarrow f'(x)=0\to\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{a-2x}}\to 2\sqrt{x}=\sqrt{a-2x}\to 4x=a-2x$

$\to a=6x\Rightarrow x=\frac{a}{6}$

چون مشتق یکی از نقطه‌ها را نشان داد پس نقطه دیگر، یکی از نقاط انتهایی بازه بوده است.

$D_f:\ x\geq 0$

$a-2x\geq 0\to\frac{a}{2}\geq x\quad\Big\}\ \frac{a}{2}\geq x\geq 0$

$x=\frac{a}{6}\to f(x)=\underbrace{\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{4a}{6}}}_{\to\ max}\qquad x=\frac{a}{2}\to f(x)=\sqrt{\frac{a}{2}}\to min$

$x=0\to f(x)=\sqrt{a}$

$$\Rightarrow \sqrt{12} = \sqrt{\frac{a}{2}} \times \Big(\underbrace{\sqrt{\frac{2a}{3}} + \sqrt{\frac{a}{6}}}_{3\sqrt{\frac{a}{6}}}\Big) \Rightarrow \sqrt{12} = 3\sqrt{\frac{a}{6}} \times \sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow \sqrt{12} = 3\sqrt{\frac{a^2}{12}}$$

$$\Rightarrow 12 = 9 \times \frac{a^2}{12} \Rightarrow a^2 = \frac{144}{9} = 16 \Rightarrow a = \begin{cases} +4 \ \checkmark \\ -4 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [a] = \{[4], 4]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) & x \geq 2,\ x \leq -2 \\ -\frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) & -2 < x < 2 \end{cases} \qquad -3$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - 2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2} & x \geq 2,\ x \leq -2 \\ \frac{2x(x^4-4x^2) - (4x^3-8x)(x^2-1)}{(x^2-1)^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$

$$\Rightarrow (4x^3-8x)(x^2-1) = 2x(x^4-4x^2) \Rightarrow 4x^5 - 12x^3 + 8x = 2x^3(x^2-4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^4 - 12x^2 + 8 = 2x^4 - 8x^2 \Rightarrow 2x^4 - 4x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 < 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

x		-2		0		2	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		ext		ext		ext	

۳ نقطه ext دارد

۴ـ

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

نقاط A و B باید در ضابطه تابع صدق کنند

$$\Rightarrow \begin{cases} A: x=0 \to y=0 = \boxed{d} \\ B: x=1 \to y=1 = a+b+c+\cancel{d} \Rightarrow \boxed{a+b+c=1} \end{cases}$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

حال نقاط A و B باید ریشه‌های مشتق تابع باشند
(تابع پیوسته و در تمام نقاط مشتق پذیر است)

$$\Rightarrow x=0 \to y'=0 = \boxed{c}$$

$$\Rightarrow x=1 \Rightarrow y' = 0 = 3a+2b+\cancel{c} \to \boxed{3a+2b=0}$$

$$\begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ a+b+c=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=-2 \\ b=3 \end{matrix} \Rightarrow ab=-6$$

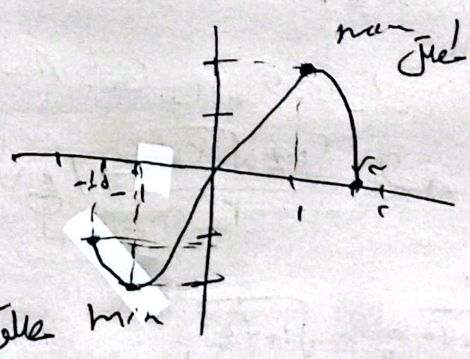
۵ـ در بازه مورد نظر عبارت درون قدر مطلق (+) است پس قدر مطلق را برمی‌داریم:

$$x \in [-1.5, \sqrt{3}] \to |3x - x^3| = 3x - x^3 \to f(x) = 3x - x^3$$

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \to f'(x) = 0 \to 3 - 3x^2 = 0 \to x = \pm 1$$

x	-1.5		-1		1		$\sqrt{3}$
y'		$-$		$+$		$-$	
y	$-\frac{9}{8}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

min مطلق



min مطلق برابر (−2) است (در نقطه $x=-1$)

۶-

$y = x^2|x| + 2ax^2 + b$

نقطه مورد نظر باید در ضابطه تابع صدق کند داریم:

$A(-1,1) \Rightarrow x=-1 , y=1 \Rightarrow 2a + b = 1 - 1 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$ I

چون نقطه مورد نظر ما min نسبی است پس باید طول نقطه مورد نظر ریشه مشتق عبارت باشد:
(البته با تبدیل فرم)

$x=-1 \Rightarrow |x| = -x$ ☆

$y = -x^3 + 2ax^2 + b \Rightarrow y' = -3x^2 + 4ax$

$\Rightarrow x=-1 \Rightarrow y' = -3 - 4a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \xrightarrow{I} b = +\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{+1.5}{-0.75} = -2$

۷-

$y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6} \Rightarrow y' = 3x + 1$

x		$-\frac{1}{3}$	
y'	$-$		$+$
y	↘	min	↗

$\xrightarrow{\text{min نقطه}} A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

مجانب افقی $y = \frac{2}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$ مجانب قائم

$y = \frac{ax+3}{(a+1)x + (a-1)} \Rightarrow$ ریشه مخرج (مجانب قائم) $= -\frac{a-1}{a+1} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3a - 3 = a + 1 \Rightarrow a = 2$

$y = \frac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{\text{تقاطع با محور } x} y = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1.5$

طول نقطه ۱/۵- است

۸-

$A\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ $y = 3$ مجانب افقی

مجانب قائم $x = -\frac{1}{2}$

ضابطه تابع ، ریشه مشترک : $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow 4(-\frac{1}{2})^3+a(-\frac{1}{2})+1=0$

$\Rightarrow a=+4$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1} = \frac{b}{4} = 3 \Rightarrow \boxed{b=12}$

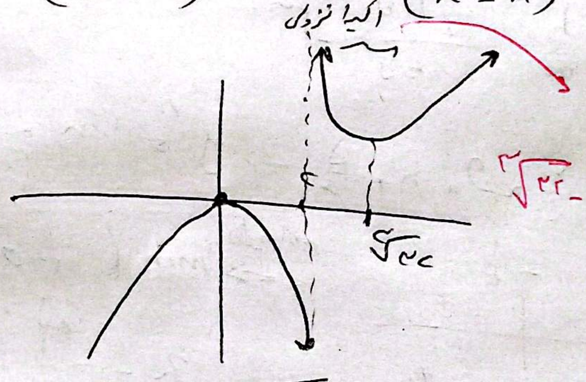
$\Rightarrow \frac{b}{a}=3$

$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-(3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}$ — ۹

$=\frac{4x^6-32x^3-3x^6}{(x^3-8)^2}=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$

x		0	2	$\sqrt[3]{32}$	
y'	$+$	$-$	$-$	$+$	
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$-\infty \quad +\infty$



طول $= \sqrt[3]{32}-2$

$\sqrt[3]{32}-2<3$

اکیدا نزولی

و طول $=2$

طول بازه $= \sqrt[3]{32}-2 = \min$

$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^2-4)-2x(x^4-3)}{(x^2-4)^2}$ — ۱۰.

$=\frac{4x^5-16x^3-2x^5+6x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^5-16x^3+6x}{(x^2-4)^2}=\frac{x(2x^4-16x^2+6)}{(x^2-4)^2}$

x	$-\sqrt{4+\sqrt{13}}$	-2	$-\sqrt{4-\sqrt{13}}$	0	$\sqrt{4-\sqrt{13}}$	2	$\sqrt{4+\sqrt{13}}$
y'	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	

$-\infty \quad +\infty$

۳ بازه که اکیدا نزولی داریم :

$(-2,-\sqrt{4})\cup(-\sqrt{4},\sqrt{4})$

$\cup(\sqrt{4},2)$