سی دستی جن و

شماره تکلیف : ۳۷

آفرین ۱۹٫۵

①

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad f(0)=0 \to f(0)=1+a+b=0 \Rightarrow b=-1$

۱٫۵

$f'(x) = 3\cos^2(2x)(-2\sin 2x) + 2ax = -6\underbrace{(1-\sin^2 2x)(\sin 2x)}_{\sin 2x - \sin^3 2x} + 2ax$

$= 6\sin^3 2x - 6\sin 2x + 2ax$

$f''(x) = 18\sin^2 2x \times 2\cos 2x - 12\cos 2x + 2a$

$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = -12 + 2a = -2 \to \boxed{a=5} \to a+b=4$

② اگر خط d در دو نقطه عمود دار $y=x^2-1$ را قطع کند شامل برخورد طول های قرینه و عرض های یکسان دارند

(x, x^2-1)

$(-x, x^2-1) \longrightarrow y' = 2x \quad m_1 = 2x, \quad m_2 = -2x \Rightarrow m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow$

$-4x^2 = -1 \Rightarrow$

$x = \pm\frac{1}{2}$ ✓

۲

مجموع عرض های این دو نقطه:

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2} - 2 = \boxed{-\frac{3}{2}}$

③

$m = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow y' = 6 \Rightarrow f'(x) = \frac{-a\times 2}{(2x-1)^2} = 6$

$y = 6x - 9 \longrightarrow 6x - 9 = \frac{a}{2x-1} \Rightarrow 12x^2 - 24x + 9 = a \Rightarrow$

$-\frac{2(12x^2-24x+9)\times 2}{4x^2-4x+1} = 6$

$-4x^2+8x-3 = 4x^2-4x+1 \Rightarrow 8x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$

پس نقطه مورد نظر $(1,-2)$ است که در $f(x)$ نیز صدق کند:

$f(1)=\frac{a}{2}=-2 \to a=-4$

$f(5)=\frac{-4}{9}=\cancel{2}-\frac{1}{3}$

۲

۴) چون این دو بر هم عمود اند مماس هستند:

$\frac{x+a}{ax+1}=2x+b \xrightarrow{x=1} \boxed{b=-1}$

$\left(\frac{x+a}{ax+1}\right)'=2 \Rightarrow \frac{1-a^2}{(ax+1)^2}=2 \Rightarrow \frac{1-a^2}{a^2+2a+1}=2 \Rightarrow$

طرفین وسطین $\Rightarrow 2a^2+4a+2=1-a^2$

$3a^2+4a+1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=\cancel{-1} \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$

۲

$a-b=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

۵)

$\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x \Rightarrow \cos x=\sin x \xRightarrow{x\in[0,2\pi]} \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{12\sqrt{2}-\pi\sqrt{2}}{16} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}x=\frac{\pi\sqrt{2}-12\sqrt{2}}{16} \Rightarrow$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}-3}$

۲

۶) چون تابع مشتق پذیر است پس اکسترمم های نسبی مشتق برابر صفر دارند:

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \to y=-16 \\ x=-1 \to y=11 \end{cases}$

$m=\frac{27}{-3}=-9 \to f'(x)=6x^2-6x-12=-9 \Rightarrow$

$6x^2-6x-3=0 \Rightarrow 2x^2-2x-1=0 \to \Delta>0$

دو نقطه وجود دارد که شیب خط مماس بر آن ها برابر ۹- باشد

۲

(۷)

$y = kx^3 + (k+1)x^2 \Rightarrow$ نقطه عطف $= \frac{-b}{3a}$

$\frac{-(k+1)}{3} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{3} > 0 \Rightarrow k > -1 \rightarrow$ به ازای هیچ مقداری منفی از k که صحیح باشد نقطه عطف در ناحیه دوم قرار نمی‌گیرد

۳

(۸) پس نقطه عطف آن $(-1, -4)$ است پس:

طول نقطه عطف $= \frac{-b}{3a} = \frac{-a}{3} = -1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ۲

$\cancel{-1} + 3 - b \cancel{-1} = -4 \Rightarrow \boxed{b = 5}$

(۹)

$f(0) = 4 \rightarrow \boxed{c = 4}$

$f'(0) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

$\rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a) \rightarrow x = -\frac{2a}{3}$ طول مینیمم نسبی

$f(-\frac{2a}{3}) = 0 \rightarrow \frac{-8a^3}{27} + a \times \frac{4a^2}{9} + 4 = 0 \Rightarrow$

$\frac{4a^3}{27} = -4 \Rightarrow \boxed{a = -3}$

۳ طول نقطه مینیمم نسبی: $x = -\frac{2a}{3} = \boxed{2}$

(۱۰)

$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) \rightarrow$

$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$-$		$+$	$-$		$+$
min		max		min	

$(\sqrt{3}, -4)$

$(-\sqrt{3}, -4)$

۲

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$

-1		$+1$	
$+$	$-$		$+$

$\rightarrow (1, 0)$

$(-1, 0)$

چون شیب دو خط AB ، CD برابر صفر است

پس این دو با هم موازی هستند و زاویه بین آنها صفر است.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0 \to \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^3(2x)+ax^2+b}{x}=0 \to \lim_{x\to 0^+}\frac{1+b}{x}=0$$ —1

$$\to \boxed{b=-1}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=2=\lim\frac{-6\sin(2x)\cos^2(2x)+2ax}{x}=2 \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(-6\times 2x)+2ax}{x}=2 \to 2a-12=2 \to 2a=14 \to \boxed{a=7}$$

$$a+b=7-1=6$$