شماره تکلیف : ۳۷ مسیح دستی

۱)

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = ۰ \quad f(۰)=۰ \to f(۰)=۱+a+b=۰ \Rightarrow b=-۱$

$f'(x) = ۳\cos^۲(۲x)(-۲\sin ۲x) + ۲ax = -۶(\underbrace{(۱-\sin^۲ ۲x)(\sin ۲x)}_{\sin ۲x - \sin^۳ ۲x}) + ۲ax$

$= ۶\sin^۳ ۲x - ۶\sin ۲x + ۲ax$

$f''(x) = ۱۸\sin^۲ ۲x \times ۲\cos ۲x - ۱۲\cos ۲x + ۲a$

$\lim_{x\to ۰^-} f''(x) = -۱۲ + ۲a = -۲ \to \boxed{a=۵} \to a+b=۴$

۲) اگر خط d در دو نقطه عمود بر $y=x^۲-۱$ را قطع کند شیب‌ها برخورد طول‌های قرینه و عرض‌های یکسان دارند

$(x, x^۲-۱)$

$(-x, x^۲-۱)$ $\longrightarrow y'=۲x$; $m_۱ = ۲x$, $m_۲ = -۲x$ $\Rightarrow m_۱ \times m_۲ = -۱ \Rightarrow -۴x^۲ = -۱ \Rightarrow x = \pm \frac{۱}{۲}$ ✓

مجموع عرض‌های این دو نقطه:

$\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ - ۱ + \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ - ۱ = \frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۳}{۲}$

۳)

$m = \frac{۱۸}{۳} = ۶ \Rightarrow y' = ۶ \Rightarrow f'(x) = \frac{-a \times ۲}{(۲x-۱)^۲} = ۶$

$y = ۶x - ۹ \longrightarrow ۶x - ۹ = \frac{a}{۲x-۱} \Rightarrow ۱۲x^۲ - ۲۴x + ۹ = a \Rightarrow$

$\frac{-۳(۴x^۲ - ۸x + ۳) \times ۲}{۴x^۲ - ۴x + ۱} = ۶ \Rightarrow$

$-۴x^۲ + ۸x - ۳ = ۴x^۲ - ۴x + ۱ \Rightarrow ۸x^۲ - ۱۲x + ۴ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$

پس نقطه مورد نظر $(1 , -2)$ است که در $f(x)$ نیز صدق کند:

$f(1) = \frac{a}{1} = -3 \to a = -3$

$f(5) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

۴) چون این دو بر هم عمود هستند:
عمودند

$\frac{x+a}{ax+1} = 2x+b \xrightarrow{x=1} \boxed{b=-1}$

$\left(\frac{x+a}{ax+1}\right)' = 2 \Rightarrow \frac{1-a^2}{(ax+1)^2} = 2 \Rightarrow \frac{1-a^2}{a^2+2a+1} = 2 \Rightarrow$

طرفین وسطین $\Rightarrow 2a^2+4a+2 = 1-a^2 \Rightarrow$

$3a^2+4a+1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 & \text{غ ق} \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$

$a-b = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

۵)

$x \in [0, 2\pi]$

$\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$

$f'(\frac{\pi}{4}) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{12\sqrt{2}-\pi\sqrt{2}}{16}$ $y=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}x = \frac{\pi\sqrt{2}-12\sqrt{2}}{16} \Rightarrow$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} - 3}$

۶) چون تابع مشتق پذیر است پس اکسترمم های نسبی مشتق برابر صفر دارند:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2-x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \to y=-14 \\ x=-1 \to y=8 \end{cases}$

$m = \frac{27}{-3} = -9 \to f'(x) = 6x^2-6x-12 = -9 \Rightarrow$

$6x^2-6x-3 = 0 \Rightarrow 2x^2-2x-1 = 0 \to \Delta > 0$

دو نقطه وجود دارد که شیب خط مماس در آن ها برابر ۹- می شود

(۷)

$y = kx^3 + (k+1)x^2 \Rightarrow$ نقطه عطف $= \frac{-b}{3a}$

$\frac{-(k+1)}{3} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{3} > 0 \Rightarrow k > -1 \rightarrow$ به ازای هیچ مقداری بیشتر از k که صحیح باشد نقطه عطف در ناحیه دوم قرار نمی‌گیرد

(۸) پس نقطه عطف آن $(-1,-4)$ است پس:

طول نقطه عطف $= \frac{-b}{3a} = \frac{-a}{3} = -1 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

$\cancel{x} + a\cancel{x^3} - b\cancel{x} = -4 \Rightarrow \boxed{b=5}$

(۹)

$f(0) = 4 \rightarrow \boxed{c=4}$

$f'(0) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

$\rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a) \rightarrow x = -\frac{2a}{3}$ طول مینیمم نسبی

$f\left(-\frac{2a}{3}\right) = 0 \rightarrow \frac{-8a^3}{27} + a \times \frac{4a^2}{9} + 4 = 0 \Rightarrow$

$\frac{4a^3}{27} = -4 \Rightarrow \boxed{a=-3}$

طول نقطه مینیمم نسبی: $x = -\frac{2a}{3} = \boxed{2}$

(۱۰)

$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) \rightarrow$

$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$-$		$+$		$-$	$+$
	min نسبی			min نسبی	

$(\sqrt{3}, -4)$

$(-\sqrt{3}, -4)$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$

	-1		1	
$+$ ∪		$-$ ∩		$+$ ∪

$\rightarrow (1, 0)$

$(-1, 0)$

چون شیب دو خط AB و CD برابر صفر است

پس این دو با هم موازی هستند زیرا شیب آنها صفر است.