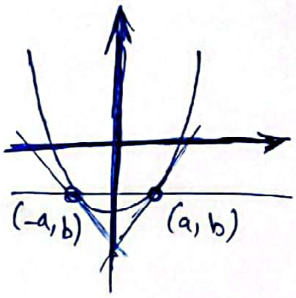
۱۵/۲۵

۵

۲-



$f(x)=x^2-1 \to f'(x)=2x$

$f'(a)=2a$, $f'(-a)=-2a$ } عمود بر هم → $-2a\times 2a=-1 \to a^2=\frac14 \to a=\pm\frac12$

$\to f(a)=\frac14-1=-\frac34 \to b+b=-\frac32$

۵

۳-

$f(x)=\frac{a}{2x-1} \to f'(x)=\frac{-2a}{(2x-1)^2}$

$(-0/5,-12)$, $(2/5,6)$ } $\to m=\frac{6-(-12)}{2/5-(-0/5)}=\frac{18}{3}=6 \to y=6x+b$

نقطه‌ی تلاقی مماس و تابع را (x,y) در نظر می‌گیریم ⟹ $\frac{-2a}{(2x-1)^2}=6$ ، $\frac{a}{2x-1}=6x+b$

$y=6x+b \xrightarrow{(2/5,6)} b=-9$

$-2a=6(2x-1)^2 \to -2a=24x^2-24x+6$

$(6x-9)(2x-1)=a \to a=12x^2-24x+9 \longrightarrow 24x^2-24x+6=-24x^2+48x-18$

$\to 48x^2-72x+24=0 \xrightarrow{\div 24} 2x^2-3x+1=0$

$\xrightarrow{a+b+c=0} x=\boxed{1}$ ، $x=\frac{c}{a}=\frac12$ ✗ چون صورت مشتق را صفر می‌کند

$x=1 \to 6(1)-9=-3 \to f(1)=-3$

$a=-3 \to f(x)=\frac{-3}{2x-1} \to f(5)=-\frac13$

۵

۴-

$y=\frac{x+a}{ax+1} \to y'=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2}$

→ مماس در نقطه‌ی به طول واحد $\to x=1 \to f(1)=\frac{a+1}{a+1}=2(1)+b \to b=-1$

$f'(1)=2 \to \frac{1-a^2}{(a+1)^2}=2 \to 2a^2+4a+2=1-a^2 \to 3a^2+4a+1=0 \to a=-1$ ✗ مخرج مشتق صفر میشه

$\boxed{a=-\frac13}$

$a-b=-\frac13+1=\frac23$

۵

کامیار رحیمی

۵-

$f(x)=g(x) \to \frac{3}{2}\sin x = \sin x + \frac{1}{2}\cos x \to \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\cos x \to \sin x = \cos x \xrightarrow{x\in[0,\pi]} \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$

$f'(x)=\cos x - \frac{1}{2}\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$ شیب خط مماس

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \to y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \to y=0 \to x = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{16} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{16} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

۱/۵

۶-

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1 \to f'(x)=6x^2-6x-12 = 6(x^2-x-2) = 6(x-2)(x+1)$

$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 2 & \\ + & - & + \end{array} \to \text{ext}\begin{cases} A(-1,\ 8) \\ B(2,\ -19)\end{cases} \to m = \frac{8-(-19)}{-1-2} = -9 \xrightarrow{\text{موازی}} f'(x) = -9$

$f'(x)=-9 \to 6x^2-6x-12=-9 \to 6x^2-6x-3=0 \to \Delta>0 \to$ دو نقطه

۲

۷-

$f(x)=Kx^3+(K+1)x^2 \to f'(x)=3Kx^2+2(K+1)x \to f''(x)=6Kx+2K+2=0 \to x=\frac{-(2K+2)}{6K}$

شرایط

$x<0 \to \frac{-(2K+2)}{6K}<0 \to \begin{array}{c} -1 \quad 0 \\ -\ +\ - \end{array}$ (1)

$\to y>0 \to Kx^3+(K+1)x^2>0 \to x^2(Kx+K+1)>0 \to Kx+K+1>0 \to x=\frac{-2K-2}{6K}$

$\to \frac{-2K-2}{6K}+K+1>0 \to \frac{4K^2+4K-2}{6K}>0 \to \begin{array}{c} -1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \\ -\ +\ -\ + \end{array}$ (2)

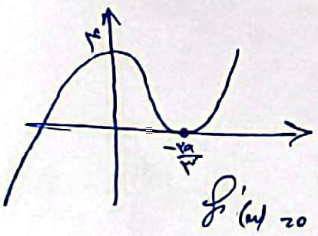
$\to$ K صحیح و ناصحیح $\xrightarrow{(1)\cap(2)}$ K صحیح متوازی فی ... باشد $\to$ K ندارد

۲

۸-

۰

۹-



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \to f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(0)=4 \to c=4$

$f'(0)=0 \to b=0 \to f'(x)=3x^2+2ax = x(3x+2a)$

$f'(x)=0 \to \boxed{x=\frac{-2a}{3}} \to f(\frac{-2a}{3})=0 \to \frac{-8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0 \to \frac{4a^3}{27}=-4 \to a=-3 \to \frac{-2a}{3} \to (2, 3)$

طول مینیمم نسبی

۱/۷۵

سوال ۱۵ : آفرین راه حل جالبی بود :) ولی تو امتحان بهش نمره نداره :(

تابع داده شده یک تابع زوج است برای همین عرض نقاط

A و B و همچنین عرض نقاط C , D یکسان است پس

شیب هر دو خط AB و CD صفر است و این دو خط با هم

موازی هستند.

۲

۱-

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos^3(2x) + ax^2 + b}{x} = 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+b}{x} = 0 \rightarrow \boxed{b=-1}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2 = \lim \frac{-6\sin(2x)\cos^2(2x) + 2ax}{x} = 2 \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(-6\times 2x) + 2ax}{x} = 2 \rightarrow 2a - 12 = 2 \rightarrow 2a = 14 \rightarrow \boxed{a=7}$

$a + b = 7 - 1 = 6$

۵-

$f(x) = g(x) \rightarrow \sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x \rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{0 \le x \le \pi} x = \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

معادله خط در $\frac{\pi}{4}$ $\rightarrow y - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{y=0} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{4}} \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} - 3}$

۸

عطف $x = -\frac{b}{3a} = \frac{-a}{3} \rightarrow x = -\frac{a}{3} \rightarrow \frac{-a}{3} = -1 \rightarrow a = 3$

$f(-1) = -4 \rightarrow -1 + 3 - b - 1 = -4 \rightarrow b = -5$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

۹

$f(0) = 4 \rightarrow c = 4$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0 \rightarrow b = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax \rightarrow x(3x + 2a) = 0 \rightarrow x = 0$

$\rightarrow x = -\frac{2a}{3}$

x		0		$-\frac{2a}{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-\frac{2a}{3}) = 0 \rightarrow \frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \rightarrow a^3 = -27 \rightarrow a = -3$

$x = \frac{-2a}{3} = \frac{-2(-3)}{3} = 2$

۱۵

$f'(x) = 4x^3 - 12x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2-3) = 0 \rightarrow x = 0 ,\ x = \pm\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

نقاط $A(-\sqrt{3},-4)$ و $B(\sqrt{3},-4)$ نقاط min نسبی تابع هستند و شیب خط AB صفر است

$f''(x) = 12x^2 - 12 \xrightarrow{f''=0} x = \pm 1 \rightarrow$

نقاط $C(1,0)$ و $D(-1,0)$ نقاط عطف هستند و شیب این

پاره خط نیز صفر است پس AB و CD موازی و زاویه‌ی بین این دو صفر است