«به نام خدا»

تکلیف شماره ۲۷ ۱۹ آفرین دکیوان (۱) مکام شب ۲۳

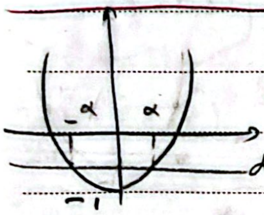
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^3(2x)+ax^2+b}{x} = 0 \quad \frac{0}{0} \quad \text{صورت} = 0 \Rightarrow 1+0+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$ ①

$$\Rightarrow f'(x) = 3\cos^2(2x)\times(-2\sin 2x) + 2ax \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos 2x\cdot \sin 4x + 2ax}{x} = 2$$

$$\xrightarrow[HOP]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0} \frac{(6\sin 2x\cdot \sin 4x)+(4\cos 4x\cdot(-3)\cos 2x)+2a}{1} = 2$$

۲

$$\Rightarrow 0+(4\times -3)+2a = 2 \rightarrow 2a-12=2 \rightarrow \boxed{a=7} \Rightarrow a+b = 6$$



$$A\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha^2-1\end{bmatrix},\ B\begin{bmatrix}-\alpha\\ \alpha^2-1\end{bmatrix} \Rightarrow m_A = 2\alpha,\ m_B = -2\alpha$$ ②

$$\Rightarrow m_A\cdot m_B = -1 \Rightarrow -4\alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha^2-1 = \frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4}-\frac{3}{4} = -\frac{3}{2} = -1.5$$ و مجموع عرض ها

۲

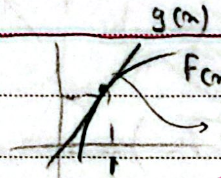
$$f(x) = \frac{a}{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-a(2)}{(2x-1)^2} = \frac{-2a}{(2x-1)^2} = 6$$ ③

۱٫۵

$$\begin{bmatrix}2.5\\6\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1.5\\-12\end{bmatrix} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{6-(-12)}{2.5-(-1.5)} = \frac{18}{3} = 6$$

$$a = -3(2x-1)^2 \longrightarrow f(x) = \frac{-3(2x-1)^2}{2x-1} = -3(2x-1)$$

$$f(5) = -3(\cancel{10}-1) = -27$$



$$f(x) = \frac{x+a}{ax+1},\quad g(x) = 2x+b \quad f'(x) = \frac{1-a^2}{(ax+1)^2} = 2 \ \xrightarrow{x=1}$$ ④

$$\frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \longrightarrow 1-a^2 = 2(a^2+2a+1)$$

۱٫۵

$$\Rightarrow 1-a^2 = 2a^2+4a+2 \Rightarrow 3a^2+4a+1=0 \longrightarrow \boxed{a=-\frac{1}{3}},\ a=-1 \times$$ تابع ثابت

$$g(1) = f(1) \rightarrow 2+b = \frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1} \Rightarrow 2+b = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow 2+b=-1 \rightarrow \boxed{b=-3}$$

$$\rightarrow a-b = -\frac{1}{3}+3 = \frac{8}{3}$$

۵

$g(x)=f(x) \Rightarrow \frac{3}{2}\sin x = \sin x + \frac{1}{2}\cos x \Rightarrow -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 0$

$\sin x = \cos x \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}} \Rightarrow f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \to \begin{bmatrix}\frac{\pi}{4}\\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix}$

طول نقطه برخورد

$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ شیب خط مماس

$(y - \frac{3\sqrt{2}}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{y=0}$

$x = \frac{\frac{\pi\sqrt{2}}{16} - \frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}(\frac{\pi}{4} - 3)}{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} - 3}$ ۲

۶

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

x		-1		$+2$	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

max نسبی   min نسبی

$A = \begin{bmatrix}-1\\8\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}2\\-19\end{bmatrix}$

$\Rightarrow m_{AB} = \frac{8-(-19)}{-1-2} = \frac{27}{-3} = -9$ ۲

$\Rightarrow f'(x) = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -9$

$\Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ ۲ ریشه دارد $\Rightarrow$ ۲ نقطه روی منحنی با این شرط وجود دارد

۷

نقطه عطف درناحیه سوم $= x_{عطف} < 0 \ , \ y_{عطف} > 0 \Rightarrow x_{عطف} = -\frac{b}{3a} = \frac{-(k+1)}{3k} < 0$ ①

$\Rightarrow$

	-1		0	
−		+		−

$\Rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

$f(x) = x^2(kx + k+1) \Rightarrow f(x_{عطف}) = \left(\frac{-(k+1)}{3k}\right)^2\left(-k\left(\frac{k+1}{3k}\right) + k+1\right)$

② $\Rightarrow f(x_{عطف}) = \frac{(k+1)^3}{9k^2} \times \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$

	-1		0	
−		+		+

$(-1, +\infty)$

$\Rightarrow k \in (0, +\infty) \Rightarrow$ به ازای هیچ مقدار k منفی صحیح، نقطه عطف در ناحیه دوم منحنی نیست.

۲

۸

نقطه عطف $= \begin{bmatrix}-۱\\-٤\end{bmatrix} \to$ ① $f(-۱)=-٤$, ② $f''(-۱)=۰$

$\to f(x)=x^۳+ax^۲+bx-۱ \to f'(x)=۳x^۲+۲ax+b \to f''(x)=۶x+۲a$

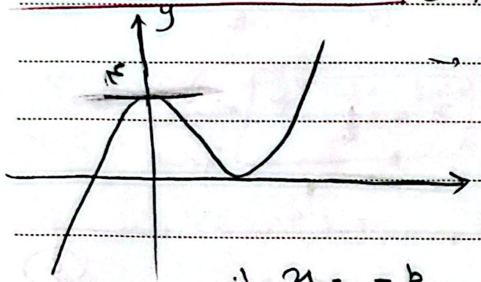
$f''(-۱)=۰ \to -۶+۲a=۰ \to \boxed{a=۳}$ ✓

$f(-۱)=-۱+a-b-۱=-٤ \xrightarrow{a=۳} -۱+۳-b-۱=-٤ \to \boxed{b=۵}$ ✓ ۲

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$ ✓

۹

① $f(۰)=٤$, ② $f'(۰)=۰$



$\to f(۰)=c \to \boxed{c=٤}$ ✓ , $f'(x)=۳x^۲+۲ax+b$

$f'(۰)=b=۰ \to \boxed{b=۰}$ ✓

$\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}=y_{عطف}=\frac{٤+۰}{۲}=۲$

$x_{عطف}=-\frac{b}{۳a} \to f(x)=x^۳+ax^۲+٤ \to x_{عطف}=\frac{-a}{۳}$

$\to f(-\frac{a}{۳})=۲ \to \frac{-a^۳}{۲۷}+a(\frac{a^۲}{۹})+٤=۲ \to \frac{-a^۳}{۲۷}+\frac{۳a^۳}{۲۷}+٤=۲$

$\frac{۲a^۳}{۲۷}=-۲ \to a^۳=-۲۷ \to \boxed{a=-۳}$ ✓ $\to f(x)=x^۳-۳x^۲+٤$

$f'(x)=۳x^۲-۶x=۰ \to ۳(x)(x-۲)=۰ \to \boxed{x_{min}=۲}$ ✓✓

← طبق شکل مشخص است که x=۲ نقطه مینیمم نسبی است.

۲

۱۰

$f(x)=x^٤-۶x^۲+۵ \to f'(x)=٤x^۳-۱۲x=۰ \to ٤x(x^۲-۳)$

x		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
y'	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
y	↘	min	↗		↘		↗
		A				B	

$A\begin{bmatrix}\sqrt{۳}\\-٤\end{bmatrix}$ ✓ , $B=\begin{bmatrix}-\sqrt{۳}\\-٤\end{bmatrix}$ ✓ $\to m_{AB}=۰$ ①

$f''(x)=۱۲x^۲-۱۲=۱۲(x-۱)(x+۱)=۰$

x		-۱		۱	
y''	$+$	۰	$-$	۰	$+$
y	∪		∩		∪
		عطف		عطف	

$\to D=\begin{bmatrix}-۱\\۰\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix} \to m_{CD}=۰$ ②

①,② $\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|=۰$ ✓ $\boxed{\alpha=۰^\circ}$

صفر درجه است ۲

$$m = \frac{۶-(-۱۲)}{۲,۵-(-۰/۵)} = \frac{۱۸}{۳} = ۶ \longrightarrow \boxed{y = ۶x - ۹}$$ ۳

$$\frac{a}{۲x-۱} = ۶x-۹ \longrightarrow ۱۲x^۲ - ۲۴x + ۹ - a = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} \cancel{۲۴}^۲ - \cancel{۴}(\cancel{۱۲})(۹-a) = ۰ \longrightarrow ۱۲ - ۹ + a = ۰$$

$$\cancel{۲۴ \times ۲۴} \quad ۱۲$$

$$\boxed{a = -۳}$$

$$f(۵) = \frac{-۳}{۲(۵)-۱} = \frac{-۳}{۹} = \boxed{-\frac{۱}{۳}}$$

$$f'(۱) = g'(۱) \longrightarrow \frac{۱-a^۲}{(a+۱)^۲} = ۲ \longrightarrow \frac{(۱-a)(\cancel{۱+a})}{(\cancel{a+۱})(a+۱)} = ۲ \longrightarrow ۱ - a = ۲a + ۲$$ ۴ -

$$۳a = -۱ \longrightarrow \boxed{a = -\frac{۱}{۳}}$$

$$f(۱) = g(۱) \longrightarrow \frac{۱-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}} = ۲ + b \longrightarrow \boxed{b = -۱} \longrightarrow a - b = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$