به نام خدا

ماهان نزارکرد

تکلیف ۲۷ ۲۱ اسفند

۲۰ آفرین بسیار عالی و کامل مصطفی

۱- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{\cos^3(2x)+ax^2+b}{x} = \frac{0}{0^-}$

$\Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \cos^3(0)+a(0)+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

$f'(x) = 3\cos^2(2x)\times 2\times(-\sin 2x)+2ax$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{x} = \frac{-6\cos^2(2x)\sin 2x+2ax}{x} = \frac{0}{0}$

هم ارزی

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{-6(1-2x^2)^2\times 2x+2ax}{x} = -12(1-2\times 0^2)^2+2a$

$= -12+2a = 2 \Rightarrow \boxed{a=7}$

$\Rightarrow a+b=6$ ۲

۲- $d: y_2 = k$, $y_1 = x^2-1$ $\xrightarrow{\text{برخورد}} x^2-1=k \Rightarrow x=\pm\sqrt{k+1}$

$y_1' = 2x \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{k+1} \Rightarrow m = 2\sqrt{k+1} \\ x=-\sqrt{k+1} \Rightarrow m' = -2\sqrt{k+1} \end{cases}$

$\Rightarrow mm'=-1 \Rightarrow -4(k+1)=-1 \Rightarrow k=-\frac{3}{4}$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{4}$

$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{4}$ $\Big|\ y+y' = -\frac{6}{4} = -1.5$ ۲

۳- $A(2.5, 6)$, $B(-0.5, -12)$ $\Rightarrow$ شیب خط $= m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18}{3} = 6$

$\Rightarrow y-6 = 6(x-2.5) \Rightarrow y = 6x-9$

$f(x) = \frac{a}{2x-1}$ $\xrightarrow{\text{معادله تلاقی}} \frac{a}{2x-1} = 6x-9 \Rightarrow 12x^2-24x+9-a=0$

معادله خط: $y = 6x-9$

چون خط بر منحنی مماس شده است پس معادله تلاقی ریشه مضاعف دارد:

$$12x^2 - 24x + 9 - a = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 24 \times 24 - 4 \times 12 \times (9-a) = 0$$

$$\Rightarrow 9 - a = \frac{24 \times 24}{12 \times 4} = 12 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{-3}{2x-1}$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{-3}{9} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

۲

۴- $y = \dfrac{x+a}{ax+1} \Rightarrow y' = \dfrac{1-a^2}{(ax+1)^2} = m = 2 \Big\} \; I$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + b = b + 2 \\ y = \dfrac{x+a}{ax+1} = \dfrac{1+a}{1+a} = 1 \end{cases} \Big\} \; b + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$I: x = 1 \Rightarrow \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \Rightarrow 2a^2 + 2 + 4a = 1 - a^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 4a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \text{غ ق ق} \quad y = \dfrac{x-1}{-x+1} = -1 \\ a = -\dfrac{1}{3} \; \checkmark \end{cases}$$

تابع ثابت می‌شود

$$\Rightarrow a - b = -\frac{1}{3} - (-1) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

۲

۵- $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos x$, $g(x) = \frac{3}{2}\sin x$

$$\xrightarrow{f(x) = g(x)} \sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow \boxed{\cos x = \sin x} \xrightarrow{x \in [0,\pi]} x = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow[y=0]{\text{تقاطع با محور } x} -\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\underbrace{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -3 + \frac{\pi}{4}}$$

۲

۶- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

x		-1		2	
y'	$+$		$-$		$+$
y	↗		↘		↗
		ext max نسبی		ext min نسبی	

$A(-1, 8)$, $B(2, -19)$ $\Rightarrow m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-27}{3} = -9$

نقاط با شیب -9 $\longrightarrow$ $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0$ ۲

$\rightarrow \Delta = 36 + 72 > 0 \longrightarrow$ ۲ نقطه وجود دارد

۷- در نقطه عطف جهت تقعر منحنی تغییر می‌کند و علامت مشتق دوم تغییر می‌کند چون دامنه تابع $\mathbb{R}$ است و پیوسته است پس نقطه‌ای را می‌خواهیم که مشتق دوم در آن صفر گردد تغییر علامت دهد و در ناحیه اول باشد:

$y = kx^3 + (k+1)x^2 \Rightarrow y' = 3kx^2 + 2(k+1)x$

$\Rightarrow y'' = 6kx + 2(k+1) = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2k-2}{6k} = \dfrac{-k-1}{3k} > 0$

		-1		0	
	$-$		$+$		$-$

$\rightarrow k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$] I

$y > 0 \Rightarrow kx^3 + (k+1)x^2 = \underbrace{x^2}_{\geq 0}(kx + k + 1) > 0$

$kx + k + 1 > 0 \xrightarrow{x = \frac{-k-1}{3k}} \dfrac{-k^2 - k}{3k} + k + 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{2k^2 + 2k}{3k} > 0$

		-1		0	
	$-$		$+$		$+$

$\rightarrow k \in (-1, +\infty) - \{0\}$] II

۲

I, II $k \in (0, +\infty) \rightarrow$ هیچ مقدار منفی برای k وجود ندارد

(۰/۵)

۸ـ تعریف نقطه عطف: نقطه‌ای که نمودار در آن تقعر عوض کند پس

مختصات نقطه عطف در جواب تابع پیوسته باشد ۰/۵ است پس در نقطه x=1

مشتق دوم آن صفر می‌شود :

$y = x^3 + ax^2 + bx - 1$

$\to y' = 3x^2 + 2ax + b \to y'' = 6x + 2a \xrightarrow{x=-1} y'' = -6 + 2a = 0$

$\to \boxed{a = 3}$

$f(-1) = -4 \to f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + b(-1) - 1 = -1 + 3 - b - 1 = -4$

۲

$\to \boxed{b = 5} \to \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0/6$

۹ـ با توجه به شکل تابع از نقطه $(0,4)$ عبور کرده، مشتق آن در این نقطه برابر

۰ می‌باشد (ماکزیمم نسبی است)

$f(0) = 4 = \boxed{c}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f'(0) = 0 = \boxed{b}$

$\to f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a) \to \begin{cases} x = 0 \to \text{ماکزیمم نسبی} \\ x = -\frac{2a}{3} \to \text{min نسبی} \end{cases}$

چون تابع در نقطه min خود با محور x ها برخورد کرده پس $x = \frac{-2a}{3}$ ریشه تابع است پس:

$f(-\frac{2a}{3}) = \frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0$

$\to \frac{-8a^3 + 12a^3}{27} = -4 \to \frac{4a^3}{27} = -4 \to a^3 = -27 \to \boxed{a = -3}$

۲

$\to x = \frac{-2a}{3} = \frac{6}{3} = 2$

۱۰ـ $f(x) = x^4 - 6x^2 + d \to f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$

تعیین علامت f'

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\rightarrow$ شیب AB ، $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، ۰

min نسبی $\rightarrow$ $(-\sqrt{3}, -4)$

min نسبی $\rightarrow$ $(+\sqrt{3}, -4)$

تعیین علامت f''

x		-1		1	
y''	$+$		$-$		$+$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

عطف $\rightarrow$ $(-1, 0)$

عطف $\rightarrow$ $(1, 0)$

$\rightarrow$ شیب بی‌نهایت ، $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، ۰

∞

ن

پس زاویه ۹۰ درجه دارد خط تشکیل نمی‌شود. (یا زاویه بین آنها ۰ است)

(در واقع ۲ خط موازی هستند و تقاطعی ندارند!!)