به نام خدا

ماهان نژادکریم

۱۲ ریاضی ۳

تکلیف ۲۷

۱-

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \frac{\cos^3(2x)+ax+b}{x} = \frac{0^-}{0^-}$$

$$\Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \cos^3(0)+a(0)+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

$$f'(x) = 3\cos^2(2x)\times 2\times(-\sin 2x)+a$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x} = \frac{-6\cos^2(2x)\sin 2x + a}{x} = \frac{0^-}{0^-}$$

هوپیتال

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-6(1-\sin^2 2x)\sin 2x + ax}{x} = -12(1-\sin^2 0)+a$$

$$= -12+a = 2 \Rightarrow \boxed{a=7}$$

$$\Rightarrow a+b=6$$

۲-

$$d: y_2=k,\quad y_1=x^2-1 \xrightarrow{\text{برخورد}} x^2-1=k \Rightarrow x=\pm\sqrt{k+1}$$

$$y_1'=2x \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{k+1} \Rightarrow m=2\sqrt{k+1} \\ x=-\sqrt{k+1} \Rightarrow m'=-2\sqrt{k+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow mm'=-1 \Rightarrow -4(k+1)=-1 \Rightarrow \boxed{k=-\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow x_1=\sqrt{\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2} \Rightarrow y=\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{3}{4}$$
$$x_2=-\sqrt{\tfrac{1}{4}}=-\tfrac{1}{2} \Rightarrow y'=\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{3}{4}$$
$$y+y'=-\tfrac{6}{4}=-1.5$$

۳-

$$A(2.5,\ 6),\quad B(-0.5,\ -12) \Rightarrow \text{شیب خط AB}: m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{18}{3}=6$$

$$\Rightarrow y-6=6(x-2.5) \Rightarrow y=6x-9$$

$$f(x)=\frac{a}{2x-1}$$

مماس: $y=6x-9$

$$\xrightarrow{\text{معادله تلاقی}} \frac{a}{2x-1}=6x-9 \Rightarrow 12x^2-24x+9-a=0$$

چون خط بر منحنی مماس شده است پس معادله تلاقی ریشه مضاعف دارد:

$$12x^2 - 24x + 9 - a = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 24 \times 24 - 4 \times 12 \times (9 - a) = 0$$

$$\Rightarrow 9 - a = \frac{24 \times 24}{12 \times 4} = 12 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{-3}{2x - 1}$$

$$\Rightarrow f(5) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

۴ـ

$$y = \frac{x + a}{ax + 1} \Rightarrow y' = \frac{1 - a^2}{(ax + 1)^2} = m = 2 \quad \mathrm{I}$$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + b = b + 2 \\ y = \frac{x + a}{ax + 1} = \frac{1 + a}{1 + a} = 1 \end{cases} \quad b + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$\mathrm{I}: x = 1 \Rightarrow \frac{1 - a^2}{(a + 1)^2} = 2 \Rightarrow 2a^2 + 2 + 4a = 1 - a^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 4a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \xrightarrow{\text{غ ق ق}} y = \frac{x - 1}{-x + 1} = -1 \\ a = -\frac{1}{3} \checkmark \end{cases}$$

تابع ثابت می‌شود

$$\Rightarrow a - b = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$$

۵ـ

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos x, \quad g(x) = \frac{3}{2}\sin x \quad \xrightarrow{f(x) = g(x)} \sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow \cos x = \sin x \xrightarrow{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow[y = 0]{\text{تقاطع با x ها}} -\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\underbrace{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -3 + \frac{\pi}{4}}$$

۶- $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 6x - 12$

x		-1		2	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		ext max نسبی		ext min نسبی	

$A(-1, 8)$, $B(2, -19) \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-27}{3} = -9$

نقاط با شیب -9 $\longrightarrow$ $f'(x) = 12x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 12x^2 - 6x - 3 = 0$

$\rightarrow \Delta = 36 + 144 > 0 \longrightarrow$ ۲ نقطه وجود دارد

۷- در نقطه عطف جهت تقعر منحنی تغییر می‌کند و علامت مشتق دوم تغییر می‌کند چون دامنه تابع $\mathbb{R}$ است و پیوسته است پس نقطه‌ای را می‌خواهیم که مشتق دوم در آن صفر گردد تغییر علامت دهد و در ناحیه اول باشد:

$y = kx^3 + (k+1)x^2 \Rightarrow y' = 3kx^2 + 2(k+1)x$

$\Rightarrow y'' = 6kx + 2(k+1) = 0 \rightarrow x = \frac{-2k-2}{6k} = \frac{-k-1}{3k} > 0$

	-1		0	
$-$		$+$		$-$

$\rightarrow k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$] I

$y > 0 \Rightarrow kx^3 + (k+1)x^2 = \underbrace{x^2}_{>0}(kx + k + 1) > 0$

$kx + k + 1 > 0 \xrightarrow{x = \frac{-k-1}{3k}} \frac{-k^2 - k}{3k} + k + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2k^2 + 2k}{3k} > 0$

	-1		0	
$-$		$+$		$+$

$\rightarrow k \in (-1, +\infty) - \{0\}$] II

$\mathrm{I}, \mathrm{II} \quad k \in (0, +\infty) \rightarrow$ هیچ مقدار منفی

برای k وجود ندارد

۸ـ تعریف نقطه عطف: نقطه‌ای که خط مماس بر منحنی از آن عبور می‌کند پس (الف)

مختصات نقطه عطف، چون تابع پیوسته است ۱- است پس در نقطه x=-1

مشتق دوم آن صفر می‌شود:

$$y = x^3 + ax^2 + bx - 1$$

$$\rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow y'' = 6x + 2a \xrightarrow{x=-1} y'' = -6 + 2a = 0$$

$$\rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$f(-1) = -4 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + b(-1) - 1 = -1 + 3 - b - 1 = -4$$

$$\rightarrow \boxed{b = 5} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = ۰/۶$$

۹ـ با توجه به شکل تابع از نقطه (۰،۴) عبور کرده، مشتق آن در این نقطه برابر

۰ می‌باشد (زیرا ماکزیمم است)

$$f(0) = 4 = \boxed{c}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f'(0) = 0 = \boxed{b}$$

$$\rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{max نسبی} \\ x = -\frac{2a}{3} \rightarrow \text{min نسبی} \end{cases}$$

چون تابع در نقطه min خود با محور xها برخورد کرده پس $x = \frac{-2a}{3}$ را در تابع قرار می‌دهیم پس:

$$f\left(-\frac{2a}{3}\right) = \frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0$$

$$\rightarrow \frac{-8a^3 + 12a^3}{27} = -4 \rightarrow \frac{4a^3}{27} = -4 \rightarrow a^3 = -27 \rightarrow \boxed{a = -3}$$

$$\rightarrow x = \frac{-2a}{3} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

۱۰ـ

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + d \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

تعیین علامت $f'(x)$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\rightarrow$ شیب‌ها ، $\frac{dy}{dx} = 0$

min نسبی — $(-\sqrt{3}, -4)$

min نسبی — $(+\sqrt{3}, -4)$

تعیین علامت $f''(x)$

x		-1		1	
y''	$+$		$-$		$+$
y	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$\rightarrow$ شیب شیب‌ها ، $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

عطف — $(-1, 0)$

عطف — $(1, 0)$

پس نمودار ما در ۲ نقطه خط تکلیف نمی‌شود. (با زاویه صاف از آنها رد می‌شود)

(در واقع ۲ خط موازی با محور x را قطع می‌کند!!)