... دوازدهم دوشنبه پسر

1-

$F(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b$

$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} = 2 \xrightarrow{Hop} f''(x) = 2 \to \boxed{f''(0)=2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \xrightarrow{Hop} f'(x) = 0 \to \boxed{f'(0)=0} \to f(0)=0$

$f'(x) = -6\cos^2(2x)\sin 2x + 2ax$ $\to \boxed{a+b=6}$

$\to f(0)=0 \to 1+b=0 \to \boxed{b=-1}$

$\to f''(0)=2$

$\to f''(x) = 12\sin 4x \sin 2x + -6\cos^2 2x \; 2\cos 2x + 2a = 2$

$\to -12+2a=2 \to a=7$

2-

راه اول (مشتق):

$y=x^2-1 \to f'(x)=2x$

$x_1=\alpha \to$ نقطه اول $\to f'(x_1)=2\alpha$

$x_2=-\alpha \to$ نقطه دوم $\to f'(x_2)=-2\alpha$

می‌دانیم اگر عمود باشند ضرب شیب برابر -1 است

$\to -4\alpha^2=-1 \to \alpha=\pm\frac{1}{2} \to \boxed{\alpha=+\frac{1}{2}}$, $\alpha=-\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{4}$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}-1 = -\frac{3}{4}$

$\to \boxed{2\times -\frac{3}{4} = -1.5}$

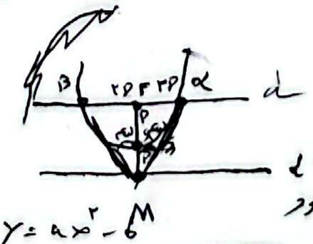
راه دوم (تعریف هندسی سهمی)، سهمی مرکز دوایری است که از خط هادی و کانون به یک اندازه باشند در این سوال گفته شده خط d سهمی را در دو نقطه قطع کرده و مماس‌ها در این نقاط عمودند ادعا می‌کنیم که خط d وتر کانونی سهمی ماست و از کانون سهمی می‌گذرد

اثبات: می‌دانیم که فاصله راس از کانون و خط هادی برابر P است

و می‌دانیم که طول وتر کانونی 4P است و MF عمود منصف آن است

از نقطه α و β مماس رسم می‌کنیم و ادعا می‌کنیم در نقطه M روی خط هادی است زیرا دو زاویه ۴۵ تشکیل می‌دهد که ۹۰ می‌شود و بر هم عمود می‌شوند

پس مختصات عرض آن دو نقطه همان عرض کانون سهمی است



می‌دانیم در سهمی $y=ax^2-b$

$P=\frac{1}{4a} \to \boxed{P=\frac{1}{4}}$

$\to S\,|^{0}_{-1} \to -1+\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

$\to -\frac{3}{4}\times 2 = -\frac{3}{2} = -1.5$

کدوم راه رو بیشتر دوست داشتید؟

3-

$A\,|^{2.5}_{6}$, $B\,|^{-0.5}_{-12}$ $\to m_{AB} = \frac{18}{-3} = 6$

$f(x) = \frac{a}{2x-1} \to f'(x) = 6 \to \frac{-2a}{(2x-1)^2} = f'(x) \to \frac{-2a}{(2x-1)^2}$

$\boxed{a = -3(2x-1)^2}$

$\to f(x) = \frac{-3(2x-1)^2}{(2x-1)} = -3(2x-1)$

$\to f(5) = -6x+3 = -27$

پارسا کریمی دوازدهم دوشنبه پسر

— ۴

$y = 2x + b$, $f(x) = \frac{x+a}{ax+1}$ $\Big\}$ → $y(1) = f(1)$

→ $2 + b = \frac{1+a}{1+a} = 1$ → $\boxed{b=-1}$

→ $y'(1) = f'(1)$

→ $2 = \frac{1-a^2}{\cancel{(ax+1)^2}\ (a+1)^2}$ → $2a^2 + 4a + 2 = 1 - a^2$

→ $3a^2 + 4a + 1 = 0$

$\frac{-4 \pm 2}{6} = -1 \ , \ -\frac{1}{3}$

→ $a = -\frac{1}{3}$

→ $a - b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

→ $a = -1$ → مخرج صفر

غ ق ق

— ۵

$g(x) = \frac{3}{2}\sin x$, $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos x$ $\Big\}$ → $g(x) = f(x)$ → $\sin x = \cos x$ → $\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$

$f'(x) = \cos - \frac{1}{2}\sin$ → $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\left| \begin{matrix} \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{matrix} \right.$ $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2} - 1}{4}$ → $x = \frac{\frac{3\sqrt{2}-1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

— ۶

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

→ $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

-1 max , 2 min

$A \left| \begin{matrix} -1 \\ 8 \end{matrix} \right.$, $B \left| \begin{matrix} 2 \\ -19 \end{matrix} \right.$ $\Big\}$ → $m = \frac{-27}{3} = -9$

→ $6x^2 - 6x - 12 = -9$ → $6x^2 - 6x - 3 = 0$ → $\Delta > 0$

دو نقطه وجود دارد

— ۷

$y = kx^3 + (k+1)x^2$

→ $y' = 3kx^2 + (2k+2)x$

→ $y'' = 6kx + 2k + 2$ → $x = \frac{-2k-2}{6k}$ → -1 , 0 : $- \ | \ + \ | \ -$

سپاس از شما رقعدار

پارسا کریمی

۸-

$y = x^3 + ax^2 + bx + 1$

خط مماس بر منحنی
در نقطه (۴-و۱-)
از داخل منحنی می‌گذرد } → تعریف نقطه عطف → $f(-1) = -4$ ، $f''(-1) = 0$

$\rightarrow -1 + a - b + 1 = -4$

$\rightarrow \boxed{a - b = -4}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(-1) = 0 \rightarrow -6 + 2a = 0 \rightarrow \boxed{a = 3}$ ، $\rightarrow \boxed{b = 7}$ } $\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$

۹-

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$\rightarrow f(0) = 4 \rightarrow \boxed{c = 4}$

$f'(0) = 0 \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow b = 0$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2ax = 0 \rightarrow 3\cancel{x^2} = -2a\cancel{x}$

ریشه دیگر مشتق $\rightarrow \boxed{x = -\frac{2a}{3}}$

تابع به ازای این مقدار هم خودش صفر می‌شود و هم مشتقش (نقطه مضاعف)

$f(-\frac{2a}{3}) = 0 \rightarrow -\frac{8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \rightarrow \frac{4a^3}{27} = -1 \rightarrow a = -3$

$x = 2$ طول نقطه min نسبی

۱۰-

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

A و B min نسبی $\rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x \rightarrow 12 = 4x^2 \rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$-$		$+$	$-$		$+$

min نسبی: $x = \pm\sqrt{3}$

D و C نقاط عطف $\rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$A\begin{vmatrix} \sqrt{3} \\ -4 \end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix} -\sqrt{3} \\ -4 \end{vmatrix}$ $C\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $D\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

زاویه‌ای نخواهند ساخت چون موازی هستند